ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente material se ha elaborado con el propósito de servir de apoya tanto a los profesores que imparten el curso de Cálculo Diferencial, así como a los alumnos que toman dicho curso. Sin duda alguna también les será de utilidad a los alumnos que adeudan esta materia y que tengan interés en ponerse al corriente.

Este libro cubre las ocho unidades de Cálculo Diferencial de los programas vigentes de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias sociales y Administrativas, siendo éstas: Lógica, Conjuntos, números Reales, Funciones, Límites, Continuidad, Derivadas y Aplicaciones de la Derivada. Cada una de las unidades fueron elaboradas de tal forma que se inicia con la presentación de situaciones problemáticas en las que son útiles los contenidos de la unidad, posteriormente se dan los elementos teóricos básicos, se continua con el planteamiento y elaboración de ejemplos elegidos de forma tal que se inicia con los más simples y posteriormente se van complicando, además también como ejemplos se les da solución a problemas que puedan estar relacionados con la realidad y que en ellos se manejen los conceptos de la unidad, de igual forma se plantean ejercicios en los que se utiliza la misma idea de los ejemplos; es decir, se dan primero los más sencillos y poco a poco aumenta su dificultad. Finalmente con el objeto de que este material les resulte más práctico tanto a lo profesores como a los alumnos, al término de cada unidad se les da la respuesta de cada uno de los ejercicios.

Otras de las características de este material, es que fue elaborado de forma tal que les resultara lo más simple posible al alumno, es decir, es accesible y es apropiado para el estudiante, con este material los alumnos adquirirán las bases suficientes para continuar con los cursos posteriores de Matemáticas. Además en este libro se encuentran resueltos y propuestos una gran cantidad de ejemplos y de ejercicios que han aparecido en los diferentes exámenes (Departamentales, extraordinarios, de a título, etc.) y muchos otros del mismo estilo. Con lo cual se pretende que los alumnos que adeudan la materia de Cálculo Diferencial les sea de mucha utilidad el tener a la mano este material y de esta forma se espera que aumente el aprendizaje de los alumnos, esto es, que aumente el número de aprobados.

También les hago saber que a pesar del empeño y el ímpetu con el que fue elaborado este texto, estoy seguro que puede ser mejorado y por esta razón les agradeceré a todos los lectores que quieran hacer críticas, sugerencias o aportaciones para su mejoramiento, me las hagan llegar recurriendo al Cubículo 15 del Área de Matemáticas.

Prof. Juan Tamayo Zaragoza

UNIDAD 1

LÓGICA

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno será capaz de:

- ♦ Traducir e interpretar del lenguaje común al lógico y viceversa.
- ♦ Distinguir, reconocer y plantear los argumentos correctos e incorrectos que lleven a una conclusión lógica
- ♦ Estructurar su razonamiento para que éste sea exacto y a la vez útil.

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$	$\neg B$	$\Rightarrow$	$\neg A$
1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Ejemplo de un arguemento que resulta ser una **Tautología**

1) LÓGICA

El hombre se distingue de los demás animales por su capacidad de razonamiento y para mejorar dicha capacidad, le fue necesario hacer uso de una herramienta matemática, siendo esta la Lógica Matemática o Lógica Simbólica.

En la actualidad, la definición de Lógica que mejor se adapta a nuestras necesidades es:

Lógica es el conjunto de los métodos y principios usados para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto.

1.1. Proposiciones simples y proposiciones compuestas

En la lógica se distinguen dos tipos de proposiciones, siendo estas:

- Proposiciones Simples o atómicas.
- Proposiciones Compuestas o Moleculares.

Antes de iniciar el tratamiento de estos dos tipos de proposiciones, se dará la definición de los que es una proposición:

Proposición es la oración afirmativa que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas.

Como ejemplos de proposiciones se dan los siguientes:

1. 4 es menor que ocho
2. Carlos es alto
3. México es un país de América
4. 6 es mayor que 10
5. María es inteligente
6. El sábado no hay clases
7. 5 más 11 es 16
8. El uno es el primer número natural

Ahora se dan algunas expresiones que no son proposiciones:

1. ¿Cómo te llamas?
2. ¿Qué hora es?
3. UPIICSA
4. El árbol
5. ¡Levanta esa pluma!

Estas expresiones no son proposiciones porque no afirman nada que sea verdadero o falso, es decir, la 1 y 2 son preguntas, la 3 y 4 son frases y la 5 es una orden.

Las proposiciones simples o atómicas son proposiciones que ya no pueden descomponerse en dos expresiones que sean proposiciones.

Ejemplos de proposiciones simples o atómicas:

1. La ballena es roja
2. La raíz cuadrada de 16 es 4
3. Gustavo es alto
4. Teresa va a la escuela

A las proposiciones en las que aparecen las partículas gramaticales como:

No, o, y, si…entonces, si y solo si.

Se les llama Proposiciones Compuestas o Moleculares.

Ejemplos de proposiciones compuestas:

1. La ballena no es roja
2. Gustavo no es alto
3. Teresa va a la escuela o María es inteligente
4. 4 es menor que 8 o 6 es mayor que 10
5. El 1 es el primer número primo y es mayor que cero
6. El 7 es mayor que 5 y 7 es menor que 10
7. Si Yolanda es estudiosa entonces pasará el examen
8. Si corro rápido entonces llegaré temprano
9. Terminaré rápido si y sólo si me doy prisa
10. Aprenderé Matemáticas si y sólo si estudio mucho

Observación. Se les llama términos de enlace o conectivos lógicos a las partículas:

No, o, y, si…entonces, si y solo si

observemos que los conectivos: o, y, si…entonces, si y solo si, se usan para enlazar dos proposiciones, pero el conectivo no actúa sobre una sola proposición.

1.2. Conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción, condicional y bicondicional.

A continuación se da una tabla en la que se da la expresión gramatical y el nombre del conectivo que representa:

Conectivo	Nombre
no	Negación
o	Disyunción
y	Conjunción
Si…entonces	Condicional
Si y sólo si	Bicondicional

1.3. Simbolización de proposiciones

Para simbolizar cualquier proposición es necesario saber como se simbolizarán las proposiciones simples y los conectivos. A las proposiciones simples las simbolizaremos con letras mayúsculas:

A, B, C, … , X, Y, Z

El nombre y símbolo de los conectivos se da en la tabla siguiente:

Conectivo	Símbolo	Nombre
no	$\neg$ o $\sqcup$	Negación
o	$\vee$	Disyunción
y	$\wedge$	Conjunción
Si…entonces	$\Rightarrow$ *o* $\rightarrow$	Condicional
Si y sólo si	$\Leftrightarrow$ *o* $\leftrightarrow$	Bicondicional

Ejemplos

Simbolizar las proposiciones que se dan:

1. La ballena no se roja

   En este ejemplo la proposición simple es: <u>la ballena es roja</u>, luego podemos proceder de la forma siguiente:

   A=la ballena es roja

   Y la simbolización para la proposición compuesta, al utilizar el símbolo correspondiente para el conectivo no, es:

   $\neg A$

Es importante tener presente que la negación siempre antecede a la proposición simple al dar la simbolización.

2. Gustavo no es alto

   B=Gustavo es alto

   Luego la simbolización es: $\neg B$

3. Teresa va a la escuela o María es inteligente

   C=Gustavo es alto D=María es inteligente

   Luego la simbolización es: $C \vee D$

4. 4 es menor que 8 o 6 es mayor que 10

E=4 es menor que 8 F=6 es mayor que 10

La simbolización es: $E \vee F$

5. El 1 es el primer número natural y es mayor que cero

G=el 1 es el primer número natura H=el 1 es mayor que cero

La simbolización es: $G \wedge H$

6. 7 es mayor que 5 y 7 es menor que 10

J=7 es mayor que 5 K=7 es menor que 10

La simbolización es: $J \wedge K$

7. Si Yolanda es estudiosa entonces pasará el examen

L=Yolanda es estudiosa M=Yolanda pasará el examen

La simbolización es: $L \Rightarrow M$

8. Si corro rápido entonces llegaré temprano

N=corro rápido O=llegaré temprano

La simbolización es: $N \Rightarrow O$

9. Terminaré rápido si y sólo si me doy prisa

P=terminaré rápido Q=me doy prisa

La simbolización es: $P \Leftrightarrow Q$

10. Aprenderé Matemáticas si y sólo si estudio mucho

R=aprenderé matemáticas S=estudio mucho

La simbolización es: $R \Leftrightarrow S$

11. Carlos no va al cine y no va al parque

T=Carlos va al cine U=Carlos va al parque

La simbolización es: $\neg T \wedge \neg U$

12. Si Rosa y Javier van de paseo entonces se divierten

V=Rosa va de paseo W=Javier va de paseo
X=Rosa se divierte Y=Javier se divierte

La simbolización es: $(V \wedge W) \Rightarrow (X \wedge Y)$

13. Si 3 es mayor que 2 y 2 es mayor que cero entonces 3 es mayor que cero

A=3 es mayor que 2 B=2 es mayor que cero
C=3 es mayor que cero

La simbolización es: $(A \wedge B) \Rightarrow C$

14. No ocurre que Alejandro sea alto y sea chaparro

D=Alejandro es alto E=Alejandro es chaparro

La simbolización es: $\neg (D \wedge E)$

Observación. Siempre que aparezca la expresión "no ocurre que" indica que en la simbolización la negación antecede a los paréntesis y dentro de ellos se debe incluir la simbolización de la proposición restante.

15. Si estudio mucho y asisto a clases entonces no reprobaré el examen y pasaré la materia

F=estudio mucho G=asisto a clases
H=reprobaré el examen I=pasaré la materia

La simbolización es: $(F \wedge G) \Rightarrow (\neg H \wedge I)$

Con el fin de ahorrar paréntesis es importante considerar la fuerza o jerarquía de de los conectivos. A continuación se dan los conectivos de menor a mayor fuerza:

a) $\neg$ b) $\vee$ c) $\wedge$ d) $\Rightarrow$ y e) $\Leftrightarrow$

Como se observa el más débil de todos es el conectivo "no" y el más de ellos es el conectivo "si y sólo si".

A partir de la fuerza o predominancia de los conectivos, las proposiciones se clasifican de la siguiente forma:

- Se les llama **negativas** a las proposiciones en donde predomina el conectivo "$\neg$"
- Se les llama **disyuntivas** a las proposiciones en donde predomina el conectivo "$\vee$".
- Se les llama **conjuntivas** a las proposiciones en donde predomina el conectivo "$\wedge$".
- Se les llama **condicionales** a las proposiciones en donde predomina el conectivo "$\Rightarrow$".
- Se les llama **bicondicionales** a las proposiciones en donde predomina el conectivo "$\Leftrightarrow$".

Ejemplos de proposiciones simbolizadas en donde se pueden eliminar algunos paréntesis:

1. La proposición condicional $(A \wedge B) \Rightarrow C$ se puede expresar como $A \wedge B \Rightarrow C$, dado que el conectivo "$\Rightarrow$" supera al conectivo "$\wedge$".

2. La proposición bicondicional $(A \wedge C) \Leftrightarrow (D \vee E)$ puede expresarse como $A \wedge C \Leftrightarrow D \vee E$.

3. La proposición disyuntiva $(\neg A) \vee (\neg B)$ se puede escribir como $\neg A \vee \neg B$.

4. La proposición bicondicional $(\neg A) \Rightarrow (\neg B) \Leftrightarrow (\neg C) \vee D$ se puede escribir como $\neg A \Rightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg C \vee D$.

1.4. Tablas de verdad, Tautologías y Contradicciones.

A toda proposición A se le asocia un valor de verdad, siendo este verdadera o falsa, lo cual se representa como:

- Valor de verdad de A = V(A) = V = verdadero
- Valor de verdad de A = V(A) = F = falso

también se acostumbre representarlo por:

- V(A) = 1 = verdadero o V(A) = 0 = falso

El $V(\neg A) = V = 1$ sólo cuando $V(A) = F = 0$.
El $V(A \vee B) = F = 0$ sólo cuando $V(A) = V(B) = F = 0$.
El $V(A \wedge B) = V = 1$ sólo cuando $V(A) = V(B) = V = 1$.
El $V(A \Rightarrow B) = F = 0$ sólo cuando $V(A) = V = 1 \quad y \quad V(B) = F = 0$.
El $V(A \Leftrightarrow B) = V = 1$ sólo cuando $V(A) = V(B)$.

Es importante considerar que en la proposición condicional $A \Rightarrow B$, la A es el antecedente y B es el consecuente.

Considerando los valores de verdad anteriores las tablas de verdad son las siguientes:

Tabla de verdad de la proposición negativa $\neg A$**.**

A	$\neg A$
V	F
F	V

o

A	$\neg A$
1	0
0	1

Tabla de verdad de la proposición disyuntiva $A \vee B$**.**

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

o

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabla de verdad de la proposición conjuntiva $A \wedge B$**.**

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

o

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabla de verdad de la proposición condicional $A \Rightarrow B$**.**

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

o

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabla de verdad de la proposición bicondicional $A \Leftrightarrow B$**.**

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

o

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Observemos que el número de renglones de una tabla de verdad es 2^n en donde n es el número de proposiciones simples que aparecen en la proposición compuesta.

Haciendo uso de las tablas de verdad podemos verificar cuando una proposición es una tautología, cuando es una contingencia y cuando es una contradicción, para tal efecto se dan las definiciones siguientes:

Definición 1. Una proposición compuesta es una **Tautología** si al construir su tabla de verdad el resultado en cada renglón es verdadero independientemente de los valores de verdad que tomen las proposiciones simples que intervienen.

Definición 2. Una proposición compuesta es una **Contradicción** si al construir su tabla de verdad el resultado en cada renglón es falso independientemente de los valores de verdad que tomen las proposiciones simples que intervienen.

Definición 3. Una proposición compuesta es una **Contingencia** si al construir su tabla de verdad no resulta tautología o contradicción.

Ejemplos

Construir la tabla de verdad de las proposiciones compuestas que se dan e indicar si se trata de una tautología, contradicción o contingencia.

1. $\neg A \vee B$

Es una proposición disyuntiva en la que intervienen 2 proposiciones simples, luego la tabla está formada por cuatro renglones.

A	B	$\neg A$	B	$\neg A \vee B$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

Por lo tanto es una contingencia

2. $\neg A \Rightarrow \neg B$

Es una proposición condicional y su tabla es.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Por lo tanto es una contingencia

3. $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

Es una proposición condicional y su tabla es la siguiente.

A	B	$A \Rightarrow B$	A	$(A \Rightarrow B) \wedge A$	B	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1

Por lo tanto es una Tautología

4. $\left(A \Rightarrow B\right) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

Es una proposición condicional y su tabla es la siguiente.

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$	$\neg B$	$\Rightarrow$	$\neg A$
1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

5. $\left(A \Rightarrow B\right) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ Luego es una Tautología

Es una proposición condicional en la que aparecen tres proposiciones simples, luego su tabla está formada por ocho renglones.

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$	$(B \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(A \Rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Por lo tanto es una Tautología

6. $\neg A \wedge B \Leftrightarrow \neg B \vee C$

Es una proposición Bicondicional en la que aparecen tres proposiciones simples, luego su tabla está formada por ocho renglones.

A	B	C	$\neg A$	$\wedge$	B	$\Leftrightarrow$	$\neg B$	$\vee$	C
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0

1.5 Equivalencia Lógicas

Si una proposición bicondicional es una Tautología se le llamará Equivalencia Lógica.

Ejemplos.

Verifique si las proposiciones bicondicionales que se dan son equivalencias lógicas o no.

1. $\neg A \wedge \neg B \Leftrightarrow \neg\left(A \vee B\right)$

   Su tabla de verdad es.

A	B	$\neg A$	$\wedge$	$\neg B$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(A \vee B)$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0

Por lo tanto como la proposición bicondicional es una tautología, se dice que es una Equivalencia Lógica o que las proposiciones $\neg A \wedge \neg B \quad y \quad \neg\left(A \vee B\right)$, son lógicamente equivalentes. La notación que se acostumbra en estos casos es:

$$\neg A \wedge \neg B \quad \equiv \quad \neg\left(A \vee B\right)$$

1. $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg\left(A \wedge B\right)$

   Su tabla de verdad es.

A	B	$\neg A$	$\vee$	$\neg B$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(A \wedge B)$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0

Por lo tanto como es una tautología, se dice que es una Equivalencia Lógica o que las proposiciones $\neg A \vee \neg B$ y $\neg(A \wedge B)$, son lógicamente equivalentes. Es decir:

$$\neg A \vee \neg B \equiv \neg(A \wedge B)$$

1.6. Argumentos, inferencias lógicas con proposiciones abiertas.

Definición. Un argumento es un razonamiento en el que aparecen ciertas proposiciones que siempre se consideran verdaderas (llamadas premisas) y a partir de las cuales se da una conclusión.

Ejemplos de argumentos.

1. Si estudio mucho entonces pasaré el examen
   Estudio mucho
   Por tanto, pasaré el examen.

2. Si llovió entonces hubo nubes
   No hubo nubes
   Por tanto, no llovió.

3. Si se levanta aire húmedo, entonces refrescará
   Si refresca entonces se formarán nubes
   No se levanta aire húmedo
   Por tanto, no se formarán nubes.

Al considerar un argumento es importante saber si es válido o no y en este sentido las tablas de verdad pueden ser usadas como se indica a continuación.

Definición. Se dice que un argumento cuyas premisas son A_1, A_2, $A_3,...,A_n$ y que su conclusión es B, es válido (correcto) si la proposición $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge,...,\wedge A_n \Rightarrow B$ es una tautología. Esto es debe de resultar una implicación lógica.

Ejemplos.

Utilizando la tablas de verdad verificar si los argumentos dados anteriormente son válidos o no.

1. Si estudio mucho entonces pasaré el examen
   Estudio mucho
   Por tanto, pasaré el examen.

   La simbolización es:

A= estudio mucho   y   B=pasaré el examen

Luego, la simbolización completa es:

$$
\begin{array}{l}
A \Rightarrow B \\
A \\
\therefore \quad B
\end{array}
$$

Ahora para verificar que el argumento es válido se necesita que la proposición $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ sea una tautología, pero en el ejemplo 3 de la sección 1.4 se comprobó que si lo es, por lo tanto el argumento es válido.

2. Si llovió entonces hubo nubes
   No hubo nubes
   Por tanto, no llovió.

   La simbolización es:
   A= llovió   y   B=hubo nubes
   Luego, la simbolización completa es:

$$
\begin{array}{l}
A \Rightarrow B \\
\neg B \\
\therefore \quad \neg A
\end{array}
$$

   Ahora para verificar que el argumento es válido se necesita que la proposición $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ sea una tautología, pero en el ejemplo 4 de la sección 1.4 se comprobó que si lo es, por lo tanto el argumento es válido.

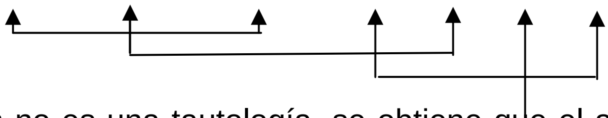
3. Si se levanta aire húmedo, entonces refrescará
   Si refresca entonces se formarán nubes
   No se levanta aire húmedo
   Por tanto, no se formarán nubes.

   La simbolización es:
   A= Se levanta aire húmedo   y   B=refrescará
   C=se formarán nubes.
   Luego, la simbolización completa es:

$$
\begin{array}{l}
A \Rightarrow B \\
B \Rightarrow C \\
\neg A \\
\therefore \quad \neg C
\end{array}
$$

   Ahora para verificar que el argumento es válido se necesita que la proposición $\left[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\right] \wedge \neg A \Rightarrow \neg C$ sea una tautología.

A	B	C	[$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$	$(B \Rightarrow C)$]	$\wedge$	$\neg A$	$\Rightarrow$	$\neg C$
1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1



Como la proposición no es una tautología, se obtiene que el argumento no sea válido.

Cuando aparecen tres o más proposiciones simples en un argumento resulta tedioso estar utilizando las tablas de verdad para verificar su valides, luego entonces un método más conveniente para verificar si un argumento es válido o no, es deducir las conclusiones de sus premisas por una secuencia de argumentos más cortos y más elementales que sabemos válidos. A estos nuevos argumentos más cortos, que son válidos, se les llama **Reglas de Inferencia**.

Modus Poniendo Ponens

Esta regla de inferencia se aplica cuando aparecen como premisas una condicional y el antecedente de esa condicional para obtener como conclusión al consecuente de la condicional. Consideremos algunos ejemplos en donde se aplica la regla de Inferencia del Modus Poniendo Pones.

Si estudio mucho, entonces pasaré el examen……premisa 1
Estudio mucho………………………………………premisa 2
Pasaré el examen……………………………………. conclusión.

Otro ejemplo es:

Si no hace frió, entonces el lago no se helará…….premisa 1
No hace frió…………………………………………premisa 2
El lago no se helará………………………………..conclusión.

El primer ejemplo se expresa simbólicamente como:

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow B & \text{P1} \\ A & \text{P2} \\ \hline \text{B} & \text{Conclusion} \end{array}$$

La simbolización del segundo ejemplo es:

$$\begin{array}{ll} \neg C \Rightarrow \neg D & \text{P1} \\ \neg \text{C} & \text{P2} \\ \hline \neg \text{D} & \text{Conclusion} \end{array}$$

En resumen podemos expresar al Modus Ponendo Ponens (Lo denotaremos por P.P.) como:

1. $(A) \Rightarrow (B)$ P1
2. (A) P2
3. (B) P.P. 1,2.

Los paréntesis nos indican que dentro de ellos pueden existir proposiciones compuestas.

Ejemplos.

Demostrar la validez de los argumentos que se dan, utilizando el Modus Poniendo Ponens.

Si se levanta aire húmedo, entonces refrescará
Si refresca entonces se formarán nubes
Se levanta aire húmedo
Por tanto, se formarán nubes.

La simbolización es:
A= Se levanta aire húmedo y B=refrescará
C=se formarán nubes.
Luego, la simbolización completa es:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ A \\ \therefore \quad C \end{array}$$

Para la demostración podemos acomodar el argumento de la manera siguiente:

Demostrar: C
1. $A \Rightarrow B$ P
2. $B \Rightarrow C$ P
3. A P
4. B P.P. 1,3.
5. C P.P. 2,4.

Esto es se concluyó C al utilizar dos veces el Modus Ponendo Ponens en las premisas dadas.

A continuación se dan algunos ejemplos en donde los argumentos ya se dan de manera simbólica.

I. II.

Demostrar: $\neg K$

1. $Q \Rightarrow \neg K$ P
2. $Z \Rightarrow Q$ P
3. Z P
4. Q P.P. 2,3.
5. $\neg K$ P.P. 2,4.

Demostrar: $A \vee B$

1. $\neg C \Rightarrow A \vee B$ P
2. $D \vee E \Rightarrow \neg C$ P
3. $D \vee E$ P
4. $\neg C$ P.P. 2,3.
5. $A \vee B$ P.P. 2,4.

III.

Demostrar: $\neg N$

1. $Q \Rightarrow \neg N$ P
2. $\neg S \Rightarrow Q$ P
3. R P
4. $R \Rightarrow \neg S$ P
5. $\neg S$ P.P. 3,4.
6. Q P.P. 2,5.
7. $\neg N$ P.P. 1,6.

Doble Negación

Esta regla de inferencia será denotada por DN y se ejemplificará con la proposición

No ocurre que María no es alta

A partir de esta proposición podemos concluir: María es alta. Simbólicamente se representa de la forma:

1. $\neg\neg M$ P
2. M DN 1

en donde M=María es alta.

La doble negación se puede usar de dos formas, estas son:

1. $\neg\neg A$ P
2. A DN 1

o

1. A P
2. $\neg\neg A$ DN 1

Ejemplos.

I.

Demostrar: $\neg\neg D$

1. $C \Rightarrow D$ P
2. C P
3. D P.P. 1,2.
4. $\neg\neg D$ DN. 3.

II.

Demostrar: Q

1. $\neg\neg T$ P
2. $T \Rightarrow K$ P
3. $\neg\neg K \Rightarrow Q$ P
4. T DN. 1.
5. K P.P. 2,4.
6. $\neg\neg K$ DN 5.
7. Q P.P.3,6.

III.

Demostrar: $D \vee E$

1.	$F \Rightarrow \neg\neg(M \wedge N)$	P
2.	$\neg\neg F$	P
3.	$(M \wedge N) \Rightarrow \neg\neg(D \vee E)$	P
4.	F	DN. 2.
5.	$\neg\neg(M \wedge N)$	P.P. 1,4.
6.	$M \wedge N$	DN 5
7.	$\neg\neg(D \vee E)$	P.P.3,6.
8.	$D \vee E$	DN 7.

Modus Tollendo Tollens

Esta regla de inferencia se aplica cuando se tiene como premisas a una proposición condicional y como otra de las premisas a la negación del consecuente de la condicional, para obtener como conclusión la negación del antecedente.

Un ejemplo en donde se utiliza el Modus Tollendo Tollens es:

Si llovió entonces hubo nubes…………….premisa 1
No hubo nubes………………………… …premisa 2
No llovió………………………………. …. conclusión.

La simbolización es:

$A \Rightarrow B$	P1
$\neg B$	P2
$\neg A$	Conclusion

En síntesis podemos representar al Modus Tollendo Tollens (lo denotaremos por T.T.) como:

1.	$(A) \Rightarrow (B)$	P1		1.	$(A) \Rightarrow \neg(B)$	P1
2.	$\neg(B)$	P2	o	2.	(B)	P2
3.	$\neg(A)$	T.T. 1,2.		3.	$\neg(A)$	T.T. 1,2.

Ejemplos.

Realizar las demostraciones que se indican:

I.

Demostrar: $\neg A$

1. $B \Rightarrow C$ P
2. $\neg C$ P
3. $A \Rightarrow B$ P
4. $\neg B$ T.T. 1,2,.
5. $\neg A$ T.T. 3,4.

II.

Demostrar: M

1. A P
2. $B \Rightarrow \neg A$ P
3. $\neg B \Rightarrow M$ P
4. $\neg B$ T.T.. 1,2.
5. M P.P. 3,4.

III.

Demostrar: A

1. $\neg A \Rightarrow \neg C$ P
2. $\neg B \Rightarrow C$ P
3. $\neg B$ P
4. C P.P. 2,3,.
5. $\neg\neg A$ T.T. 1,4.
6. A DN 5.

IV.

Demostrar: $\neg A$

1. $A \Rightarrow B$ P
2. $B \Rightarrow C$ P
3. $C \Rightarrow D$ P
4. $\neg D$ P
5. $\neg C$ T.T. 3,4.
6. $\neg B$ T.T. 2,5.
7. $\neg A$ T.T. 1,6.

Utilizar el hecho de que $\neg(x=0)$ es equivalente $x \neq 0$ para evitar la doble negación en las demostraciones siguientes:

V.

Demostrar: $x \neq 0$

1. $x=0 \Rightarrow x \neq y$ P
2. $x=z \Rightarrow x=y$ P
3. $x=z$ P
4. $x=y$ P.P. 2,3,.
5. $x \neq 0$ T.T. 1,4.

IV.

Demostrar: $x=y$

1. $x \neq y \Rightarrow x \neq z$ P
2. $x \neq z \Rightarrow x \neq 0$ P
3. $x=0$ P
4. $x=z$ T.T. 2,3.
5. $x=y$ T.T. 1,4.

Regla de Adjunción

Esta regla será denotada con "**A**" y consiste en lo siguiente. Supongamos que se tienen las proposiciones verdaderas:

Cinco es mayor que tres

Y la segunda es:

Tres es menor que cuatro

Como ambas son verdaderas, entonces también lo es la proposición:

Cinco es mayor que tres y tres es menor que cuatro

Al simbolizar las proposiciones se tiene lo siguientes:

A	P1
B	P2
$A \wedge B$	Conclusion

En síntesis podemos representar la regla de Adjunción como sigue:

1.	A	P		1.	A	P
2.	B	P	o	2.	B	P
3.	$A \wedge B$	A 1,2.		3.	$B \wedge A$	A 1,2.

Regla de Simplificación

Esta regla la denotaremos con "**S**" y es recíproca a la anterior, es decir, si se tiene la proposición verdadera:

Cinco es mayor que tres y tres es menor que cuatro

Podemos deducir las proposiciones verdaderas:

La primera de ellas es: cinco es mayor que tres
Y la segunda es: tres es menor que cuatro

Ahora al simbolizar las proposiciones se tiene:

$A \wedge B$	P1
A	Conclusion
B	Conclusion

En síntesis podemos representar la regla de Conjunción como sigue:

1.	$A \wedge B$	P	o	1.	$A \wedge B$	P
2.	A	S 1.		2.	B	S 1

Ejemplos.

Demostrar: M I II.

1. $A \Rightarrow B$	P
2. $\neg A \Rightarrow M \wedge N$	P
3. $\neg$B	P
4. $\neg$A	T.T. 1,3,.
5. $M \wedge N$	P.P. 2,4.
6. M	S 5.

Demostrar: $R \wedge Q$

1.	$D \wedge E \Rightarrow R$	P
2.	D	P
3.	E	P
4.	$E \Rightarrow Q$	P
5.	$D \wedge E$	A. 2,3.
6.	R	P.P. 1,5.
7.	Q	P.P. 3,4.
8.	$R \wedge Q$	A 6,7

III

Demostrar: $\neg T \wedge L$

1.	$B \Rightarrow \neg C$	P
2.	$T \Rightarrow C$	P
3.	$\neg C \Rightarrow L$	P
4.	B	P
5.	$\neg C$	P.P. 1,4.
6.	$\neg T$	T.T. 2,5.
7.	L	P.P. 3,5,
8.	$\neg T \wedge L$	A. 6,7.

IV.

Demostrar: F

1.	$K \Rightarrow M \wedge N$	P
2.	$N \Rightarrow F \wedge \neg Q$	P
3.	K	P
4.	$M \wedge N$	P.P. 1,3
5.	N	S. 4.
6.	$F \wedge \neg Q$	P.P. 2,5.
7.	F	S. 6

Modus Tollendo pones

Esta regla la denotaremos por "**TP**" y se utiliza cuando se tienen como premisas una proposición disyuntiva y la negación de una de las proposiciones que la forman y se obtiene como conclusión la proposición restante:

Simbólicamente se tiene lo siguiente:

1.	$A \vee B$	P		1.	$A \vee B$	P
2.	$\neg A$	P	o	2.	$\neg B$	P
3.	B	T.P. 1,2.		3.	A	T.P. 1,2.

También puede expresarse esta regla como:

1.	$\neg A \vee B$	P
2.	A	P
3.	B	T.P. 1,2.

Ejemplos.

I

Demostrar: $\neg M$

1. $\neg N \vee R$ P
2. $R \Rightarrow \neg M$ P
3. N P
4. R T.P. 1,3.
5. $\neg M$ P.P. 2,4.

II.

Demostrar: K

1. A P
2. $\neg A \vee \neg B$ P
3. $\neg K \Rightarrow B$ P
4. $\neg B$ T.P. 1,2.
5. $\neg\neg K$ T.T. 3,4.
6. K DN. 5

III

Demostrar: $E \wedge F$

1. $C \vee \neg D$ P
2. $\neg C$ P
3. $\neg D \Rightarrow E$ P
4. $\neg F \Rightarrow C$ P
5. $\neg D$ T.P. 1,2.
6. E P.P. 3,5.
7. F T.T. 2,4,
8. $E \wedge F$ A. 6,7.

IV.

Demostrar: Q

1. R P
2. $\neg R \vee T$ P
3. $T \Rightarrow Q \wedge S$ P
4. T P.T. 1,2
5. $Q \wedge S$ P.P. 3,4.
6. Q S. 5

Ley de Adición

Esta regla de inferencia lo que nos indica es que si se tiene una proposición verdadera "A", sigue siendo verdadera si se le agrega cualquier otra proposición utilizando el conectivo de la disyunción, esto es:

1. A P1
2. $A \vee B$ Conclusion

La ley de la adición la denotaremos por "L.A" y podemos expresarla como:

1. A P
2. $A \vee B$ L.A. 1

Ejemplos.

I

Demostrar: R

1. $B \vee C \Rightarrow R$ P
2. B P
3. $B \vee C$ L.A. 2
4. R P.P. 1,3.

II.

Demostrar: $H \vee \neg G$

1. $A \Rightarrow B$ P
2. $\neg B$ P
3. $\neg A \Rightarrow H$ P
4. $\neg A$ T.T. 1,2.
5. H P.P. 3,4.
6. $H \vee \neg G$ L.A. 5

III

Demostrar: $\neg Q$

1. $\neg A$ P
2. $K \Rightarrow A$ P
3. $\neg K \vee Z \Rightarrow \neg Q$ P
4. $\neg K$ T.T. 1,2.
5. $\neg K \vee Z$ L.A. 4.
6. $\neg Q$ P.P. 3,5.

Ley de Silogismo Hipotético

La abreviatura que utilizaremos es "S.H." y si se tienen las premisas:

Si voy a la escuela entonces asisto a clases
Si asisto a clases entonces entiendo los temas

Al utilizar la Ley del Silogismo Hipotético concluimos:

Si voy a la escuela entonces entiendo los temas

Al simbolizar estas proposiciones se tiene lo siguiente:

A=voy a la escuela B=asisto a clases y C=entiendo los temas.

Luego la simbolización completa es:

1. $A \Rightarrow B$ P1
2. $B \Rightarrow C$ P2
3. $A \Rightarrow C$ Conclusion

En síntesis la Ley del Silogismo Hipotético podemos simbolizarla como sigue:

1. $A \Rightarrow B$ P
2. $B \Rightarrow C$ P
3. $A \Rightarrow C$ S.H. 1,2.

Ejemplos.

Realizar las demostraciones que se indican:

I

Demostrar: $\neg A \Rightarrow \neg D$

1. $\neg A \Rightarrow R$ P
2. $R \Rightarrow \neg D$ P
3. $\neg A \Rightarrow \neg D$ S.H. 1,2.

II.

Demostrar: J

1. $A \Rightarrow \neg B$ P
2. $\neg B \Rightarrow C$ P
3. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow J$ P
4. $A \Rightarrow C$ S.H. 1,2.
5. J P.P. 3,4.

III

Demostrar: S

1. $\neg T \Rightarrow M$ P
2. $M \Rightarrow N$ P
3. $\neg N$ P
4. $T \Rightarrow S$ P
5. $\neg T \Rightarrow N$ S.H.1,2.
6. $\neg\neg T$ T.T. 3,5.
7. T DN 6.
8. S P.P. 4,7.

1.7. Ejercicios.

I. Simbolizar las proposiciones que se dan.

1. Sergio es doctor y Gustavo es Matemático.
2. El árbol es alto y da mucha sombra.
3. Si corro entonces no llego tarde.
4. 7-2=5 o 2+3=5
5. $16=4^2$ si y sólo si 16=4x4.
6. No ocurre que el 3 sea número par e impar.
7. No ocurre que si me levanto temprano entonces no llegue a tiempo.
8. Si no estudio y no asisto a clases entonces no pasaré el examen.
9. Si 2>1 y 1>-4 entonces 2>-4.
10. Un número es primo si y sólo si es divisible por si mismo y por la unidad.

II. Construir la tabla de verdad de las proposiciones que se da y decir si son tautologías, contradicciones o contingencias.

1. $A \Rightarrow \neg A \vee B$
2. $\neg(\neg A \vee \neg B$
3. $\neg A \Rightarrow \neg B \wedge A$
4. $\neg A \vee B \Rightarrow \neg A$
5. $(\neg A \Rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow B$
6. $A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge B)$
7. $\neg(A \Leftrightarrow \neg B)$
8. $(A \Rightarrow B) \wedge \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg C)$
9. $\neg\left[(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B\right]$
10. $\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg C$

III. Verificar si las proposiciones condicionales son equivalencias lógicas o no.

1. $\left(\neg M \vee N\right) \wedge M \Rightarrow N$
2. $(\neg A \Rightarrow \neg B) \wedge B \Rightarrow A$
3. $A \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
4. $(A \vee B \Rightarrow C) \wedge (A \vee B) \Rightarrow C$
5. $(\neg C \Leftrightarrow \neg D) \Rightarrow \neg C \wedge \neg D$

IV. Verificar si las proposiciones que se dan son equivalencias lógicas o no.

1. $A \Leftrightarrow A \vee B$
2. $\neg A \vee B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
3. $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
4. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \neg C)$
5. $C \vee D \Leftrightarrow D \vee E$

V. Simbolizar los argumentos que se dan y utilice tablas de verdad para verificar si son válidos o no.

1. Si no nos despedimos ahora, entonces no cumpliremos nuestro plan.
   No nos despedimos ahora.
   Por tanto, no cumpliremos nuestro plan.

2. Si llovió la pasada noche, entonces la pista se ha limpiado.
   La pista no se ha limpiado.
   Por tanto, no llovió la pasada noche.

3. Este hombre es un abogado o un político.
   No es un abogado.
   Por tanto, no es un político.

4. Si Mr. Lincoln es elegido, entonces los Estados del Sur se separarán con seguridad.
   Si los estados del sur se separan, entonces estallará una guerra civil.
   Por tanto, Si Mr. Lincoln es elegido, entonces estallara una guerra civil.

5. Si 5>3, entonces 7>3.
   Si 7>3, entonces 5>0.
   Por tanton, 5>0.

VI. Realizar las demostraciones que se dan:

1. Demostrar: $\neg T$
2. Demostrar: C
3. Demostrar: $\neg S$

1. $R \Rightarrow T$
2. $S \Rightarrow R$
3. S

1. $A \Rightarrow B \wedge D$
2. $B \wedge D \Rightarrow C$
3. A

1. T
2. $T \Rightarrow \neg Q$
3. $\neg Q \Rightarrow \neg S$

4. Demostrar: $M \wedge N$

1. $\neg J \Rightarrow M \vee N$
2. $F \vee J \Rightarrow \neg J$
3. $F \vee J$

5. Demostrar: $\neg\neg A$

1. $B \Rightarrow A$
2. B

6. Demostrar: $\neg\neg K$

1. $A \Rightarrow \neg B$
2. $\neg B \Rightarrow K$
3. A

7. Demostrar: $A \vee B$

1. $C \Rightarrow \neg\neg(A \vee B)$
2. $\neg\neg C$

8. Demostrar: A

1. $B \Rightarrow C \wedge D$
2. B
3. $C \wedge D \Rightarrow \neg\neg A$

9. Demostrar: B

1. $\neg B \Rightarrow \neg C$
2. $\neg C \Rightarrow \neg D$
3. D

10. Demostrar: $A \Rightarrow D$

1. $A \Rightarrow B$
2. $B \Rightarrow C$
3. $C \Rightarrow D$

11. Demostrar: $x = y$

1. $x=y \Rightarrow y = z$
2. $y=z \Rightarrow y=w$
3. $y = w \Rightarrow y = 1$
4. $y = 1$

12. Demostrar: $x = 0$

1. $x \neq 0 \Rightarrow y = 1$
2. $x=y \Rightarrow y=w$
3. $y = w \Rightarrow y \neq 1$
4. $y = y$

13. Demostrar: $D \wedge E$

1. $B \Rightarrow D$
2. $B \Rightarrow E$
3. B

14. Demostrar: $A \wedge B$

1. $A \wedge D$
2. $A \Rightarrow B$

15. Demostrar: B

1. $\neg A \Rightarrow B$
2. $\neg(C \wedge D)$
3. $A \Rightarrow C \wedge D$

16. Demostrar: $M \wedge N$

1. $M \wedge \neg Q$
2. $\neg N \Rightarrow Q$

17. Demostrar: Q

1. $\neg T \vee Q$
2. $\neg T \Rightarrow F$
3. $\neg F$

18. Demostrar: N

19. Demostrar: P

20. Demostrar: K

1. $Z \wedge R$
2. $N \vee \neg M$
3. $Z \Rightarrow M$

1. $T \Rightarrow P \vee Q$
2. $\neg\neg T$
3. $\neg Q$

1. $\neg A \vee B$
2. $\neg B$
3. $\neg(K \wedge B) \Rightarrow A$

21. Demostrar: $A \vee \neg B$
1. $B \wedge C$
2. $D \Rightarrow \neg C$
3. $\neg D \Rightarrow A$

22. Demostrar: A
1. $\neg B$
2. $C \Rightarrow B$
3. $\neg C \vee D \Rightarrow A$

23. Demostrar: Q
1. $P \wedge \neg T$
2. $S \Rightarrow T$
3. $S \vee Q$

24. Demostrar: $N \wedge M$
1. $P \Rightarrow T \wedge M$
2. P
3. $T \wedge M \Rightarrow N$

25. Demostrar: $\neg C$
1. $(B \Rightarrow C) \wedge P$
2. $C \Rightarrow A$
3. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow \neg A$

26. Demostrar: A
1. $\neg B$
2. $\neg A \Rightarrow D$
3. $D \Rightarrow B$

27. Demostrar: M
1. $\neg R \Rightarrow N$
2. $N \Rightarrow T \wedge M$
3. $R \Rightarrow J$
4. $\neg J$

28. Demostrar: A
1. $B \Rightarrow A \vee C$
2. $A \vee C \Rightarrow D$
3. $C \Rightarrow \neg(B \Rightarrow D)$
4. B

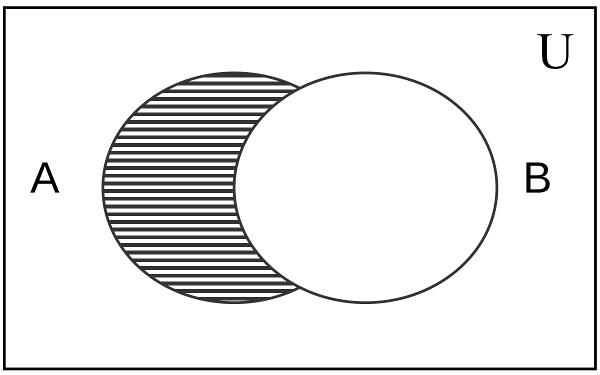
UNIDAD 2

CONJUNTOS

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno será capaz de:

- Comprender y aplicar los conceptos básicos de conjuntos.
- Realizar las operaciones básicas entre conjuntos y utilizar diagramas de Venn para representarlas.
- Realizar el producto cartesiano entre conjuntos.



$A - B$ =lo rayado

2) CONJUNTOS

En el estudio de cualquier rama de las matemáticas, resulta conveniente emplear la notación y la terminología de la teoría de conjuntos. En este texto se presentan las ideas fundamentales de la teoría de conjuntos de una forma intuitiva pero precisando los conceptos que serán utilizados en los temas posteriores.

2.1. Definición y notación

Un conjunto es un concepto matemático que no tiene definición, aunque se considera que está compuesto por objetos que satisfacen una característica determinada.

Ejemplos de conjuntos.

1. Los números 1, 2, 3, 4.
2. Las soluciones de la ecuación $x^2 + 8x - 9 = 0$.
3. Las letras a, e, i, o, u.
4. Las personas que habitan la república mexicana.
5. Los estudiantes Sergio, Gustavo, Jesús y Alejandro.
6. Los estudiantes ausentes de la escuela.
7. Los países México, Estados Unidos y Canadá.
8. Las ciudades capitales del continente americano.
9. Los números naturales.
10. Los ríos de México.

Notemos que los conjuntos de los ejemplos impares vienen definidos, o sea presentados, enumerando de hecho sus elementos, y que los conjuntos de los ejemplos pares se definen enunciando propiedades, o sea reglas, que deciden si un objeto particular es o no elemento de un conjunto.

Notación. Generalmente los conjuntos se denotan con letras mayúsculas:

A, B, C,…,X, Y, Z.

y sus elementos con letras minúsculas:

a, b, c,…,x, y, z.

Al definir un conjunto por la enumeración de sus elementos, por ejemplo el conjunto “A”, consiste de los elementos 1, 5, 8 y 15. Se denota como:

$$A = \{1, 5, 8, 15\}$$

esta es la llamada **Forma Tabular de un Conjuntos**. Si se define un conjunto enunciando sus propiedades que deben cumplir sus elementos, por ejemplo, "B" es el conjunto de todos los números pares, se emplea una letra, por lo general x, y o z, para representar un elemento cualquiera y se escribe:

$$B = \{\mathrm{x} \,|\, \mathrm{x\ es\ un\ numero\ par}\}$$

lo cual se traduce como "B es el conjunto de los números x tales que x, sea par. Se dice que esta es la forma por **Comprensión o Constructiva de un Conjunto**. Nótese que la barra "$|$" se lee "tales que".

Para practicar las notaciones dadas, se escriben de nuevo los ejemplos del 1 al 10, denotando estos conjuntos con las letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.

1. $A = \{1,2,3,4\}$.
2. $B = \{\mathrm{x} \,|\, \mathrm{x}^2 + 8x - 9 = 0\}$.
3. $C = \{a,e,i,o,u\}$
4. $D = \{\mathrm{y} \,|\, \mathrm{y\ es\ una\ persona\ que\ habita\ la\ republica\ mexicana}\}$
5. $E = \{\mathrm{Sergio,\ Gustavo,\ Jesus,\ Alejandro}\}$
6. $F = \{z \,|\, \mathrm{z\ es\ un\ estudiante\ ausente\ de\ la\ escuela}\}$
7. $G = \{\mathrm{Mexico,\ Estados\ Unidos,\ Canada}\}$
8. $H = \{\mathrm{x} \,|\, \mathrm{x\ es\ una\ capital\ y\ esta\ en\ el\ continente\ americano}\}$
9. $I = \{1,2,3,4,5,6,...\}$
10. $J = \{\mathrm{y} \,|\, \mathrm{y\ es\ un\ rio\ de\ Mexico}\}$

Relación de pertenencia. Se utilizará la notación "$x \in S$" para indicar que "x es un elemento de S" o que "x pertenece S". Si x no pertenece a S, se escribe "$x \notin S$".

Ejemplos.

Supongamos que S es el conjunto de los primeros cuatro números naturales, es decir:

$$S = \{1,2,3,4\}$$

Luego podemos escribir: $1 \in S,\quad 2 \in S,\quad 3 \in S \quad y \quad 4 \in S$. De la misma forma: $5 \notin S \quad y \quad 6 \notin S$, etc.

Igualdad de Conjuntos

Se dice que los conjuntos A y B son iguales, si cada elemento de A es elemento de B y si cada elemento de B es también elemento de A, en cuyo caso escribiremos A=B. Si uno de los conjuntos tiene algún elemento que no está en el otro, decimos que los conjuntos no son iguales y lo denotamos como $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$.

Ejemplos.

1. Considerando la definición el conjunto $A=\{2,4,6,8\}$ y el conjunto $B=\{8,4,2,6\}$ son iguales, ya que cada elemento de A es elementos de B y cada elemento de B es también elemento de A. De esta forma se observa que el orden de los elementos en un conjunto no importa.

2. Si se consideran los conjuntos $C=\left\{x \middle| x^2-3x+2=0\right\}$, $D=\{1,2\}$ y $E=\{1,1,1,2,2,2,2\}$ al usar la definición son iguales, es decir. C=D=E. Es decir no importa el número de veces que se repita un mismo elemento es un conjunto.

Conjunto Vació.

Definición. A un conjunto que no tiene elementos, se le llama conjunto vació o conjunto nulo y se denota por:

$$\varnothing \quad o \quad \{\ \ \}$$

Ejemplos.

A continuación se dan dos ejemplos de conjuntos que son vacíos.

1. El conjunto de emperadores romanos que aún viven.
2. $B=\left\{x \middle| x^2=4 \text{ y } x \text{ es impar}\right\}$. Al resolver dicha ecuación se obtiene que $x=2$ y $x=-2$ y no son impares.

2.2. Subconjuntos e intervalos

A partir de un conjunto dado se pueden formar nuevos conjuntos, llamados subconjuntos de aquél. Por ejemplo, el conjunto de los números positivos menores que 10 y divisibles por 4, es un subconjunto de los números enteros positivos múltiplos de 4 menores que 10. En general se definen como sigue.

Definición. Se dice que un conjunto A es un subconjunto de B, si todo elemento de A es también elemento de B. Y se denota como:

$$A \subset B \quad o \quad A \subseteq B$$

Cuando A no es un subconjunto de B, esto significa que algún elemento de A no es elemento de B. En tal caso se utiliza la notación:

$$A \not\subset B$$

Para dar todos los subconjuntos de un conjunto es importante considerar el hecho de que el conjunto vació es un subconjunto de todo conjunto.

Ejemplos.

1. Supongamos que $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,b,c,d,e\}$. Se observa que $A \subset B$. Sin embargo, si $C = \{a,c,f\}$ se obtiene que $C \not\subset B$, dado que $f \notin B$.

2. Sea $A = \{a,b,c\}$. Todos los subconjunto de A son: $\varnothing,\ \{\mathrm{a}\},\ \{\mathrm{b}\},\ \{\mathrm{c}\},\ \{\mathrm{a,b}\},\ \{\mathrm{a,c}\},\ \{\mathrm{b,c}\}\ \text{ y }\ \{\mathrm{a,b,c}\}$. Observemos que son ocho subconjunto en donde a los primeros siete se les llama subconjuntos propios y al último que es el que coincide con el conjunto A, se le llama subconjunto impropio. La notación usada para estos subconjuntos es: $\varnothing \subset A,\ \{\mathrm{a}\} \subset A,\ \{\mathrm{b}\} \subset A,\ \{\mathrm{c}\} \subset A$, $\{\mathrm{a,b}\} \subset A,\ \{\mathrm{a,c}\} \subset A$, $\{\mathrm{b,c}\} \subset \mathrm{A}\ \text{ y }\ \{\mathrm{a,b,c}\} \subseteq A$.

3. Obtenga todos los subconjuntos del conjunto $B = \{4,5\}$. Este conjunto tiene 4 subconjuntos, de éstos, los primeros tres son subconjuntos propios y el último que es el que coincide con B, es el impropio. Dichos subconjuntos son: $\varnothing,\ \{4\},\ \{5\}\ \text{ y }\ \{4,5\}$.

4. Dado el conjunto $D = \{1,2,3,4\}$. Obtenga todos los subconjuntos del conjunto D. Este conjunto tiene 16 subconjuntos de los cuales los primeros son propios y el último es impropio. Los subconjunto son: $\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\},\ \{1,2,3\}$, $\{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\}\ y\ \{1,2,3,4\}$.

Conjunto Universal

Cuando se considera un problema en donde intervienen varios conjuntos, es necesario determinar un conjunto en el que estén contenidos todos los demás. A este conjunto se le llama Conjunto Universal y contiene a todos los conjuntos del problema. Al conjunto universal se le simboliza por: **U.**

Ejemplos.

1. El conjunto de la humanidad es un conjunto universal y sus subconjuntos pueden ser: hombres, mujeres, niños, adultos, etc.

2. En geometría plana el conjunto universal es el conjunto de todos los puntos del plano.

3. Si consideramos los conjuntos: vocales, consonantes y $\{m, n, p, q\}$. El conjunto universal puede ser todas las letras del alfabeto.

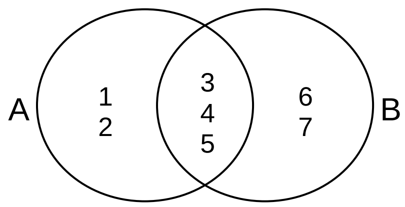
2.3. Diagramas de Venn.

Con frecuencia los conjuntos se representan por medio de superficies limitadas por líneas curvas cerradas, llamadas diagramas de Venn, en cuya región interior señalan comúnmente con puntos o letras minúsculas los elementos que pertenecen al conjunto. En ocasiones, también se escriben los nombres de los elementos.

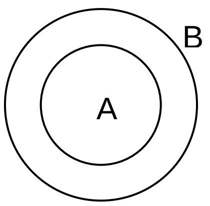
Cuando se desea indicar que uno o varios elementos no pertenecen al conjunto, los puntos y las letras minúsculas que representan a estos elementos se colocan fuera del diagrama de Venn.

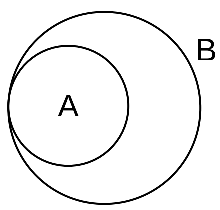
Ejemplos.

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Al hacer uso de los diagramas de Ven, se representan de la siguiente forma:



2. Supongamos que $A \subset B$ y que $A \neq B$. Dos diagramas de Venn en donde se indican las situaciones planteadas son:





2.4. Operaciones entre conjuntos y uso de los Diagramas de Ven: Unión, Intersección, resta y complemento.

El estudio matemático de los conjuntos se basa en el hecho de que éstos pueden ser combinados mediante ciertas operaciones para formar otros conjuntos, al igual que los números se combinan por adición y multiplicación para dar lugar a otros números. El estudio de las operaciones con conjuntos constituye el “algebra de conjuntos”, que tiene mucha semejanza formal (aunque también presenta diferencias) con el algebra de los números. En los últimos años se ha visto que el algebra de los conjuntos ilumina muchas ramas de la matemática, tales como la teoría de la medida y la teoría de las probabilidades; resulta también valiosa en la reducción sistemática de los conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos.

Unión de conjuntos.

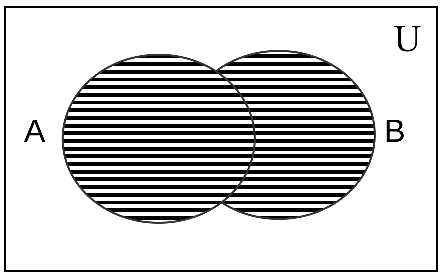
La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a uno, por lo menos, de ambos conjuntos. La unión de A y B se denota como:

$$A \cup B$$

y se traduce “A unión B”. Utilizando la forma constructiva de un conjunto, también se puede definir la unión de la manera siguiente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ o \ x \in B\}$$

En diagramas de Venn $A \cup B$ se representa como:

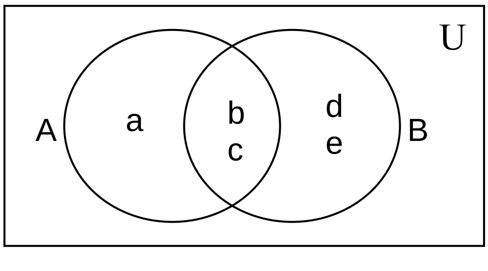


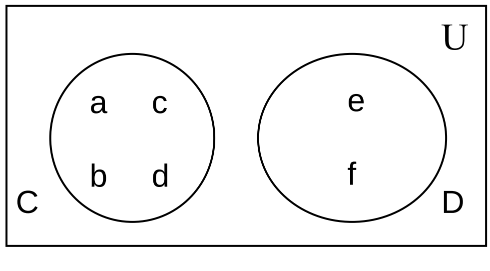
$A \cup B$ =lo rayado

Ejemplos.

1. Sea $A = \{a,b,c\} \ y \ B = \{b,c,d,e\}$ entonces $A \cup B = \{a,b,c,e\}$.
2. Supongamos que $C = \{a,b,c,d\} \ y \ D = \{e,f\}$ entonces $C \cup D = \{a,b,c,e,f\}$.

Los diagramas de Venn de ambos ejemplos son los siguientes:





Intersección entre conjuntos

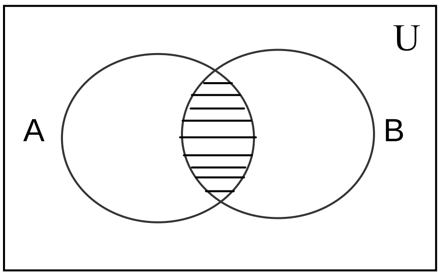
La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes de ambos conjuntos de ambos conjuntos. La intersección de A y B se denota como:

$$A \cap B$$

y se traduce "A intersección B". Utilizando la forma constructiva de un conjunto, también se puede definir la intersección de la manera siguiente:

$$A \cap B = \{x | x \in A \ \ y \ \ x \in B\}$$

En diagramas de Venn $A \cap B$ se representa como:

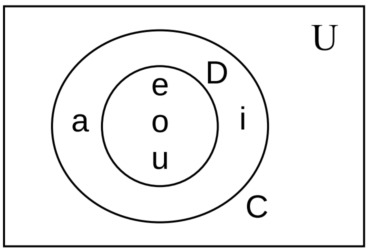


$A \cap B$=lo rayado

Ejemplos.

1. Sea $A = \{1,3,5,7,...\} \ y \ B = \{2,4,6,8,...\}$ entonces $A \cap B = \varnothing = \{ \ \ \}$.
2. Supongamos que $C = \{a,e,i,o,u\} \ y \ D = \{e,o,u\}$ entonces $C \cap D = \{e,o,u\}$.

El diagrama de ven del ejemplo 2, es el siguiente:



Diferencia entre conjuntos.

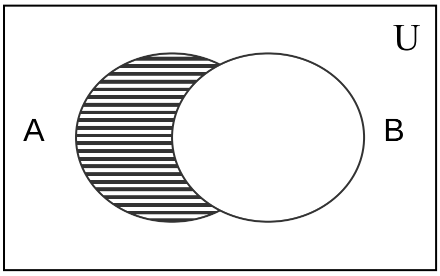
La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A, pero no pertenecen a B. La diferencia de A y B se denota como:

$$A - B$$

y se traduce "A menos B". Utilizando la forma constructiva de un conjunto, también se puede definir la diferencia de la forma:

$$A - B = \{x | x \in A \ \ y \ \ x \notin B\}$$

El diagrama de Venn para $A - B$ se representa como:



$A - B$ =lo rayado

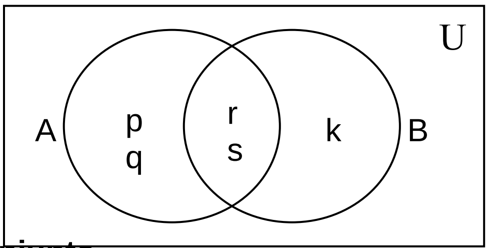
Ejemplos.

1. Sean $A = \{p, q, r, s\}$ y $B = \{r, s, k\}$ entonces:

   a) $A - B = \{p, q\}$.

   b) $B - A = \{k\}$

   El diagramad de Venn es:



Complemento de un conjunto.

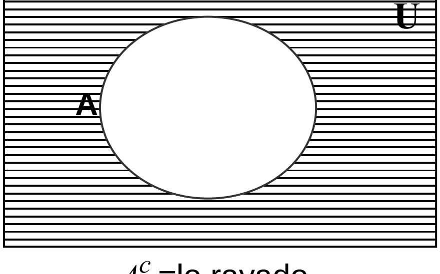
El complemento del conjunto A es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A, es decir la diferencia del conjunto universal U con el conjunto A. El complemento de A se denota como:

$$A^c$$

y se traduce "A complemento o complemento de A". Utilizando la forma constructiva de un conjunto, el complemento d A se define como:

$$A^c = \{x | x \notin A \ \ y \ \ x \in U\}$$

El diagrama de Venn para A^c se representa como:



A^c =lo rayado

Las siguientes afirmaciones se deducen de las definiciones de las operaciones con conjuntos:

- $A \cup A^c = U$
- $A \cap A^c = \varnothing$
- $U^c = \varnothing$
- $\left(A^c\right)^c = A$
- $A - B = A \cap B^c$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup U = U$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap U = A$
- $\varnothing^c = U$

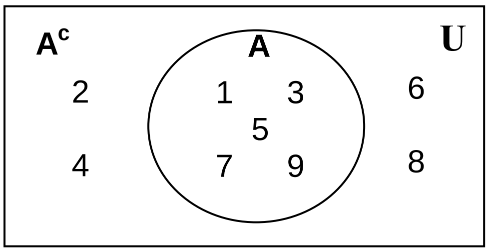
La igualdad $A - B = A \cap B^c$, se verifica de la forma siguiente:

$$A - B = \left\{x \middle| x \in A \quad y \quad x \notin B\right\} = \left\{x \middle| x \in A \quad y \quad x \in B^C\right\} = A \cap B^C$$

Ejemplos.

1. Sean $U = \{1,2,3,4,...,8,9\}$ y $A = \{1,3,5,7,9\}$ entonces: $A^C = \{2,4,6,8\}$

   El diagramad de Venn es:



2.5. Producto cartesiano entre conjuntos

El producto es otra operación binaria con la que se obtiene un nuevo conjunto, operando con dos conjuntos; aunque esta operación produce un nuevo conjunto que no esta en el conjunto universal U. Antes de discutir esta operación es necesario establecer qué se entiende por un par ordenado.

Un par ordenado (a,b) es un par de objetos en el cual el orden en el que se consideran los objetos debe ser primero “a” y después “b”. Las letras “a” y “b” usadas en (a,b) se llaman la primera y segunda componente respectivamente, del par ordenado.

Definición. Dos pares ordenados son iguales si, y sólo si, dichos pares tienen las primeras componentes idénticas e idénticas las segundas componentes: es decir (a,b)=(c,d) si, y sólo si, a=c y b=d. Luego $(a.b) \neq (b,a)$ a no ser que a=b.

Definición del producto cartesiano. Si A y B son dos conjuntos, entonces el conjunto AxB (léase "A cruz B"), se llama producto cartesiano de A con B y es el conjunto de todos los posibles pares ordenados, tales que la primera componente del par ordenado es elemento de A y la segunda componente es elemento de B.

Ejemplos.

1) Si $A = \{a,b\} \quad y \quad B = \{b,c,d\}$ entonces:

a) $AxB = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d)\}$.

b) $BxA = \{(b,a),(c,a),(d,a),(b,b),(c,b),(d,b)\}$

2) Si $C = \{1,2,3\} \quad y \quad D = \{3,4,5\}$ entonces:

a) $CxD = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$.

b) $DxC = \{(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(3,3),(4,3),(5,3)\}$

A partir de estos ejemplos, se puede afirmar en general que el producto cartesiano no es conmutativo.

2.6. Ejercicios

1. Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,5,6\} \quad y \quad C = \{1,2,3,3,5,6\}$. Completar las afirmaciones que se dan, anotando el símbolo adecuado en el espacio correspondiente.

a) $\in \quad o \quad \notin$

2___A, A___C, 1,3,2___C, 4___B y 0___A

b) $\subset \quad o \quad \subseteq$

A___C, B___B, $\varnothing$___A, B___C y $\{2,3,1\}$___A

c) $\subset \quad o \quad \not\subset$

A___C, $\varnothing$___$\varnothing$, A___B, $\varnothing$ ___A y $\{2,3,1,4\}$___A

d) $= \quad o \quad \neq$

A___B, A___$\{2,3,1\}$ y $\{\ \}$___$\varnothing$

e) Obtener todos los subconjuntos de A, B y C.

f) Obtenga los productos cartesianos: AxB, BxA, AxC, CxA, BxC y CxB.

2. Escriba en forma tabular los conjuntos:

a) $D=\left\{x\middle|x^2-3x+2=0\right\}$.

b) $E=\left\{x\middle|x \text{ es una letra de la palabra "calcular"}\right\}$.

c) $F=\left\{x\middle|x^2=9 \text{ y } x-3=5\right\}$.

d) $G=\left\{x\middle|x \text{ es una vocal}\right\}$.

e) $H=\left\{x\middle|\ddot{}x \text{ es un digito del numero "2545"}\right\}$.

3. Sean

$U=\{0,1,2,3,4,...,8,9\}, \quad A=\{0,1,3,5,7\}, \quad B=\{5,7,8,9\} \quad y \quad C=\{1,4,5,6,7\}$

. Obtener:

a) $(A\cup B)\cap C$

b) $(A\cap B)\cup C$

c) $(A-C)-B$

d) $(A-B)^C\cup C$

e) $(A\cup B)^C$

f) $(A\cup C)^C-B$

g) AxB

h) AxC

i) BxC

j) AxA

4. Sean

$U=\{1,2,3,4,...,8,9,10\}, \quad A=\{2,3,5,7,9\}, \quad B=\{3,4,6,8,10\} \quad y \quad C=\{1,5,6,7,10\}$

. Obtener:

a) $(A\cup B)\cap C$

b) $(A\cap B)\cup C$

c) $(A-C)-B$

d) $(A-B)^C\cup C$

e) $(A\cap B)^C-(A\cup B)$

f) $(A\cap B)^C\cap(A^C\cap B)$

g) $(A-B)\cup(A\cap B\cap C)$

h) $\left[A\cup(B\cap C)\right]\cup B^C$

i) $\left[(A\cap A^C)\cap(B\cap B^C)\right]^C$

j) $\left[(A^C-B^C)\cup(C^C\cap B)\right]^C$

5. Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera, usar diagramas de Venn para mostrar las siguientes igualdades:

a) $(A\cup B\}^C=A^C\cap B^C$

b) $(A\cap B\}^C=A^C\cup B^C$

c) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

d) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

e) $B-A^C=B\cap A$

f) $A\cup A=A \quad y \quad A\cap A=A$

g) $A^C-B^C=B-A$

h) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

6. Construya el diagrama de Venn para cada una de las operaciones que se indican:

a) $A \cap B^C$

b) $(A \cap B^C) \cap C$

c) $C - (A - B)$

d) $(A^C \cap B^C) \cap C^C$

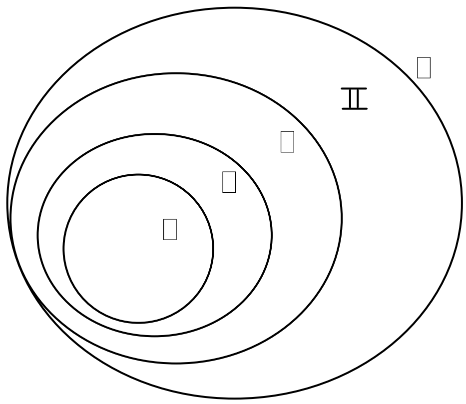
UNIDAD 3

NÚMEROS REALES

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno:

- ♦ Explicar las diferencias entre conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales, así como la relación entre ellos.
- ♦ Aplicar las propiedades de orden en la solución de desigualdades y expresarlas con notación de conjuntos e intervalos.
- ♦ Manejar la definición de valor absoluto y sus propiedades en la resolución de desigualdades con valor absoluto.



Gráfica de los conjuntos que forman los números reales

3) NÚMEROS REALES

3.1. Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales

Los números son muy importantes para el hombre moderno. En estos tiempos en los que se realizan viajes espaciales y en los que las computadoras son usadas tanto por amas de casa, así como por investigadores, los números están presentes en toda actividad del hombre. Los números afectan a las actividades más comunes, como la adquisición de alimentos en el mercado y la consulta de fechas en el calendario. Resulta claro que sin los números no existirían instrumentos de medición como el reloj, la regla y el termómetro.

El número es útil en una amplia gama de situaciones reales. Sin embargo, situaciones reales diferentes requieren el uso de diferentes clases de números: el pastor, que desea conocer el número de ovejas de su rebaño, necesita de los números naturales o números para contar; el ama de casa, que dispone de la receta de un guiso para 7 personas y desea prepararlo para 11, necesita de los números racionales o números para comparar. Para diversas aplicaciones, se han creado diversas clases de números. Por ejemplo, en este libro se indicará cuales son los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales, y se graficarán en la recta real.

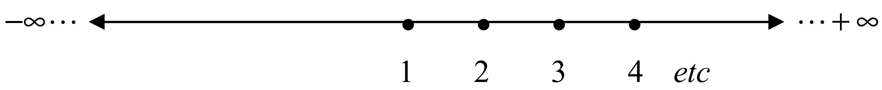
Números Naturales

Los números naturales, son los que se usan con mayor frecuencia, en actividades cotidianas; son también los números más antiguos que se conocen.

Este conjunto de números se denota como: $\mathbb{N}$ y está definido como sigue:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

La gráfica de los números naturales sobre la recta real (siendo ésta la recta horizontal que va de menos infinito a más infinito) es la siguiente:



Observemos que los números naturales al ser graficados sobre la recta real, son únicamente puntos aislados sobre ella.

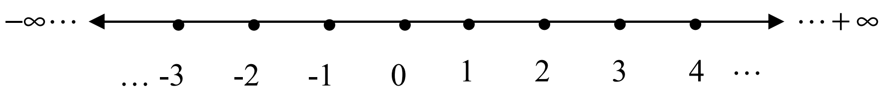
Números Enteros

Los números naturales no son suficientes para todas las actividades del hombre. Existen diversas situaciones en que las cantidades pueden considerarse en una dirección o en la dirección opuesta. Por ejemplo, un saldo de quinientos pesos a favor es muy diferente a un saldo de quinientos pesos en contra, una temperatura de quince grados sobre cero es diferente a quince grados bajo cero, no es lo mismo 100 años antes de cristo que 100 años después de cristo, etc. En estas situaciones los números naturales únicamente sirven para describir una dirección y para describir la dirección contraria, es necesario usar los números enteros.

El conjunto de números enteros se denota como: $\mathbb{Z}$ y se define por:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -5 - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

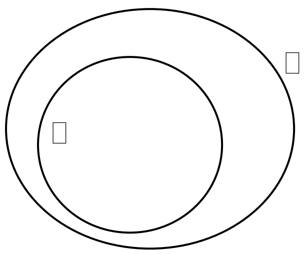
La gráfica de los números enteros sobre la recta real es:



En la gráfica se observa que los números enteros sobre la recta real, continúan siendo puntos aislados, pero ya también aparecen números negativos. Además también nos damos cuenta que los números naturales son un subconjunto de los números enteros, es decir, todo número natural es un número entero y se representa como:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Un diagrama de Venn es el siguiente:



Números Racionales

Estos números son útiles cuando es necesario trabajar con fracciones. Los números racionales se denotan por: $\mathbb{Q}$ y para definirlos se utiliza la notación constructiva de un conjunto.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in \mathbb{Z}, \ y\ q \neq 0 \right\}$$

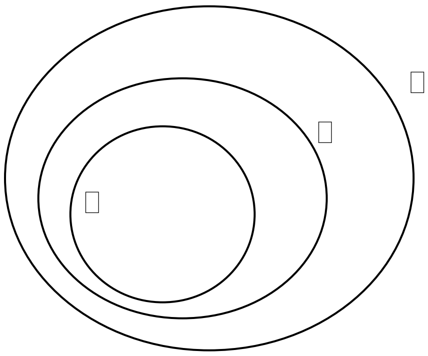
Observemos que el cociente formado por números enteros (siempre y cuando el denominar sea diferente de cero) es un número racional. Como ejemplos de números racionales se dan los siguientes:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{-7}{4},\quad \frac{6}{1},\quad \frac{20}{4},\quad \frac{9}{-8},\quad \frac{-3}{-11},\quad etc.$$

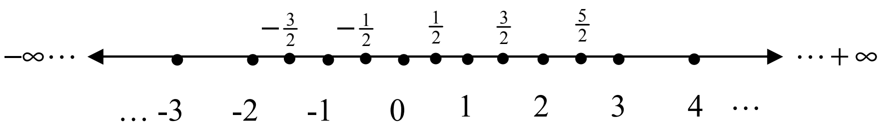
Anteriormente se indicó que todo número natural es un número entero, ocurrirá que todo número entero también sea un número racional, la respuesta es si y la forma más simple es dividir a cada número entero entre uno. De esta forma siguen siendo números enteros, pero representadas como números racionales. Luego, se obtiene que los números enteros sean un subconjunto de los números racionales, es decir:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad \text{de manera mas completa} \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

El diagrama de Venn es:



La gráfica de algunos números racionales es la siguiente:



Se puede observar que aunque fueron graficados sólo algunos números racionales, cubren mucho más espacio sobre la recta real y si nos imaginamos la gráfica de todos los números racionales, nos podremos dar cuenta que aún quedan huecos sobre la recta real y dichos huecos corresponden a los números irracionales.

Números Irracionales

Estos números no son representados como números racionales y si se representan en su expansión decimal, se distinguen de los números racionales por que su expansión decimal no es periódica y la expansión decimal de todo número racional si es periódica. A continuación se dan ejemplos de números en su expansión decimal y se indica si es racional o irracional.

1. $\sqrt{2} = 1.414213562\cdots$
2. $\sqrt{3} = 1.732050808\cdots$
3. $\pi = 3.141592654\cdots$
4. $e = 2.718281828\cdots$
5. $5.26262626\cdots$
6. $7.524524524524\cdots$
7. $0.1234123412341234\cdots$

Los ejemplos 1, 2, 3 y 4 representan números irracionales, dado que su expansión decimal no es periódica y los números de los ejemplos 5, 6 y 7 son números racionales por que su expansión decimal si es periódica, para el ejemplo 5 el período es dos, para el ejemplo 6 el período es tres y para el ejemplo 7 el período es cuatro.

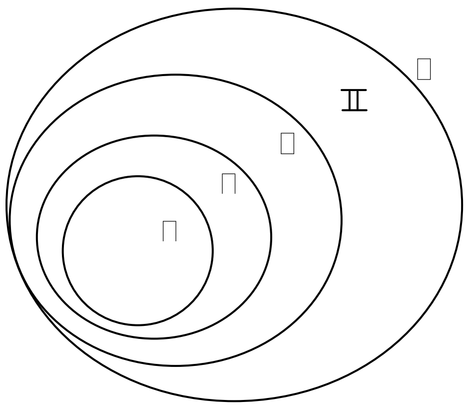
Si ahora sobre la recta real se graficaran todos los números racionales y todos los números irracionales, se cubrirían todos los puntos de la recta real, es esta la razón del por qué a cada punto de la recta real le corresponde un número real y también el por qué de dicho nombre. Los números irracionales serán denotados como: $\mathbb{I}$.

Números Reales

Los números reales se denotan por: "$\mathbb{R}$" y lo forman todos los números racionales y todos los números irracionales, es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Un diagrama de Ven en donde se contemplan a todos los conjuntos de números que hemos visto es el siguiente:



3.2. Propiedades de orden de los números reales

El concepto de “orden” se indica en la siguiente definición.

Definición 1. Los símbolos < (menor que) y > (mayor que) se definen como sigue:

a) El número real “a” es menor que el número real “b”, y se escribe como: a<b si b-a es un número positivo.
b) El número real “a” es mayor que el número real “b”, y se escribe como: a>b si a-b es un número positivo.

Definición 2. Los símbolos “menor o igual que” y “mayor o igual que” se definen por:

a) $a \leq b$ si y sólo si $a < b \quad o \quad a = b.$
b) $a \geq b$ si y sólo si $a > b \quad o \quad a = b.$

Observación 1. A las expresiones: $a < b, \quad a > b, \quad a \leq b \quad y \quad a \geq b$, se les llama desigualdades.

Observación 2. Si a<b geométricamente se indica que el punto “a” está a la izquierda del punto “b” (figuras 1, 2 y 3). a<b también se puede expresar como b>a.

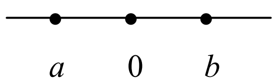


Fig. 1

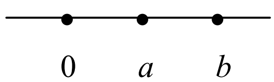


Fig. 2

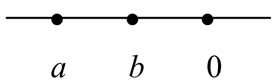


Fig. 3

Observación 3. Como a-0=a, se deduce que a>0 si y sólo si “a” es positivo. Análogamente a<0 significa que “a” es negativa.

Propiedades de orden

Para cualquier número real a, b y c se cumple que:

a) Si a<b y b<c, entonces a<c.
b) Si a<b entonces a+c<b+c.
c) Si a<b y c es positiva (c>0), entonces ac<bc.
d) Si a<b y c es negativa (c<0), entonces ac>bc.

Observación 4. Estas propiedades también se cumplen para los símbolos:

$$>, \quad \leq \quad y \quad \geq$$

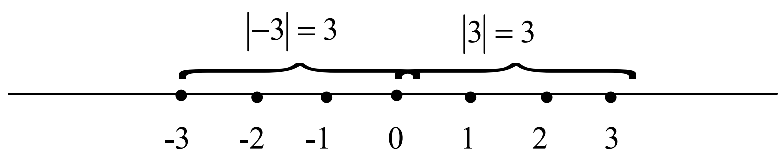
3.3. Valor Absoluto

Definición. El valor absoluto de un número real x, es denotado por: $|x|$ y se define como:

a) $|x| = x \quad \text{si} \quad x \geq 0.$

b) $|x| = -x \quad \text{si} \quad x < 0.$

Al observar esta definición nos damos cuenta que el valor absoluto de toda cantidad diferente de cero es positivo. Desde un punto de vista geométrico, el valor absoluto de x, es la distancia del punto x al origen de la recta real, es decir, al punto 0. En la siguiente figura se grafica $|-3| = 3 \quad y \quad |3| = 3$.



De igual forma la distancia entre los números reales a y b, es $|a-b| \quad o \quad |b-a|$. Es decir: $|a-b| = |b-a|$.

Ejemplos

Obtenga los valores absolutos que se dan:

1. $|0| = 0$.
2. $|20| = 20$.
3. $|-8| = -(-8) = 8$.
4. $|-25| = 25$.
5. $|12+18| = |30| = 30$.
6. $|12-18| = |-6| = 6$.
7. $||5-15| - |-20|| = ||-10| - 20| = |10-20| = |-10| = 10$.
8. $|40-100| - |40-200| = |-60| - |-160| = 60 - 160 = -100$.

Como propiedades más importantes del valor absoluto son consideradas las siguientes:

a) $|a| = |-a|$.

b) $|ab| = |a||b|$

c) $-|a| \leq a \leq |a|$

Además si $a > 0$, entonces:

d) $|x| \le a$ si y sólo si $-a \le x \le a$.
e) $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$.
f) $|x| \ge a$ si y sólo si $x \ge a \quad o \quad x \le -a$.
g) $|x| > a$ si y sólo si $x > a \quad o \quad x < -a$.

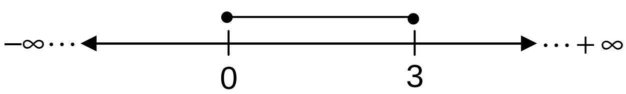
3.4. Intervalos y operaciones con intervalos

Supongamos que se tienen los conjuntos:

$A_1 = \{x | 0 \le x \le 3\}$.
$A_2 = \{x | 0 < x < 3\}$.
$A_3 = \{x | 0 \le x < 3\}$
$A_4 = \{x | 0 < x \le 3\}$

Observemos que difieren entre si, dado que por ejemplo en el primero se incluyen los extremos que son el 0 y el 3, y en segundo conjunto ya no se incluyen los extremos, es decir, en unos conjuntos se consideran los extremos y en otros no.
Gráfica, nombre y notación para cada uno de los conjuntos indicados

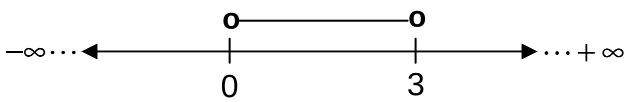
A_1



Al conjunto A_1 se le llama **intervalo cerrado,** es decir, contiene todos los números que están entre 0 y 3. También contiene los extremos, siendo estos el 0 y el 3. Su notación es:

$$x \in [0,3]$$

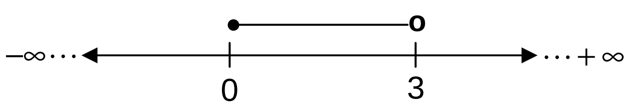
A_2



Al conjunto A_2 se le llama **intervalo abierto**, contiene todos los números que están entre 0 y 3, no contiene los extremos. Su notación es:

$$x \in (0,3)$$

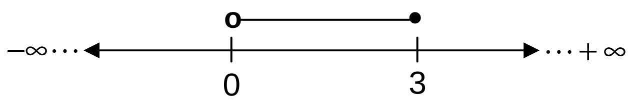
A_3



Al conjunto A_3 se le llama **intervalo cerrado-abierto**, contiene todos los valores que están entre 0 y 3, contiene el 0 y no contiene el 3. Su notación es:

$$x \in [0,3)$$

A_4



Al conjunto A_4 se le llama **intervalo abierto-cerrado,** contiene todos los valores que están entre 0 y 3, no contiene el 0 y contiene el 3. Su notación es:

$$x \in (0,3]$$

Observemos que cuando el extremo se considera geométricamente se representa por "•" y cuando no se considera se gráfica representa por "○".

Intervalos infinitos

Analicemos los conjuntos:

$B_1 = \{x | x \geq 1\} = [1,+\infty)$.

$B_2 = \{x | x > 1\} = (1,+\infty)$.

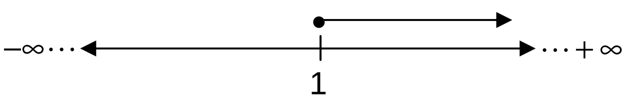
$B_3 = \{x | x \leq 1\} = (-\infty,1]$.

$B_4 = \{x | x < 1\} = (-\infty,1)$.

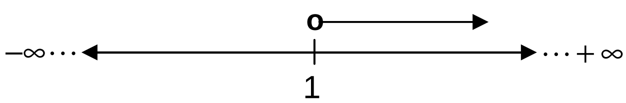
$B_5 = \{x | x \in \mathbb{R}\} = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

La gráfica para cada intervalo es:

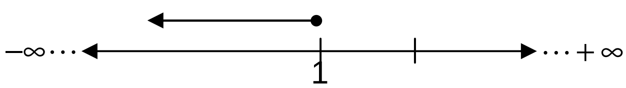
B_1



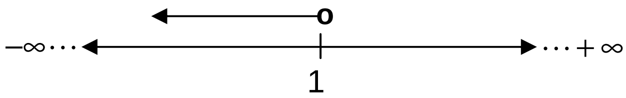
B_2



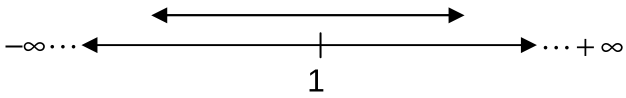
B_3



B_4



Y B_5



Observemos que la flecha hacia la derecha indica que el intervalo tiende a infinito y la flecha hacia la izquierda indica que el intervalo tiende hacia menos infinito.

Operaciones con intervalos

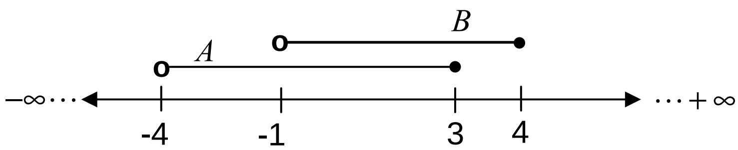
Las operaciones con las que trabajaremos son: unión, intersección y resta o diferencia. A continuación se recuerdan las definiciones de estas operaciones y para tal efecto, se utiliza la notación constructiva de conjuntos.

- $A \cup B = \left\{x \middle| x \in A \quad o \quad x \in B\right\}$
- $A \cap B = \left\{x \middle| x \in A \quad y \quad x \in B\right\}$
- $A - B = \left\{x \middle| x \in A \quad y \quad x \notin B\right\}$
- $B - A = \left\{x \middle| x \in B \quad y \quad x \notin A\right\}$

Ejemplos

1) Si $A = (-4,3] \quad y \quad B = (-1,4]$. Obtener :
$a)\ A \cup B, \quad b)\ A \cap B, \quad c)\ A - B \quad y \quad d)\ B - A$

Antes de dar la respuesta, se construye la gráfica de los intervalos indicados:

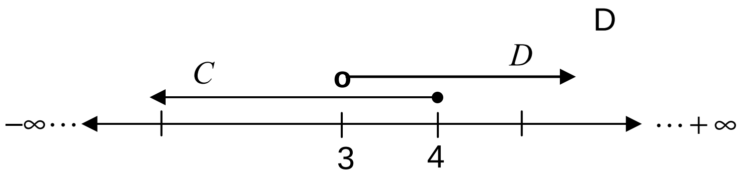


a) $A \cup B = (-4,4]$
b) $A \cap B = (-1,3]$
c) $A - B = (-4,-1]$

d) $B - A = (3,4]$

2) Si $C = (-\infty,4]$ y $D = (3,+\infty)$. Obtener:
$a)\ C \cup D,\quad b)\ C \cap D,\quad c)\ C - D \quad y \quad d)\ D - C$

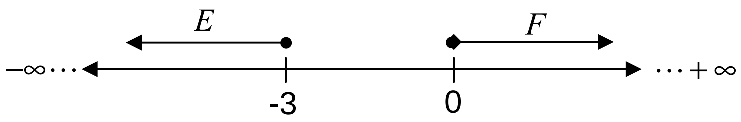
La gráfica de los intervalos es:



a) $C \cup D = (-\infty,+\infty) = R$
b) $C \cap D = (3,4]$
c) $C - D = (-\infty,3]$
d) $D - C = (4,+\infty)$

3) Si $E = (-\infty,-3]$ y $F = [0,+\infty)$. Obtener:
$a)\ E \cup F,\quad b)\ E \cap F,\quad c)\ E - F \quad y \quad d)\ F - E$

La gráfica es:



Respuesta:

a) $E \cup F = R - (-3,0)$
b) $E \cap F = \varnothing$
c) $E - F = E$
d) $F - E = F$

3.5. Desigualdades, solución y grafica.

Uno de los conceptos muy importantes en el curso de Cálculo Diferencial es el de función y su gráfica. Y para trazar la gráfica de las funciones es necesario conocer su dominio. Además para obtener el dominio en algunas funciones se necesita resolver desigualdades de tipo de las que se dan a continuación.

Ejemplos

Resolver las desigualdades que se indican:

1) $6x-4<3x-7$

Para darle solución a esta desigualdad y a muchas otras, se necesita recordar las propiedades de orden:

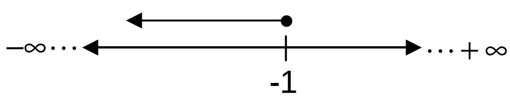
Si a, b y c son números reales, entonces:
1) Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.
2) Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$.
3) Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ac<bc$.
4) Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac>bc$.

Al aplicar la propiedad 2 y la propiedad 3, se tiene lo siguiente:

$$
\begin{gathered}
6x-4+4<3x-7+4 \\
6x<3x-3 \\
6x-3x<3x-3x-3 \\
3x<-3 \\
\frac{3x}{3}<\frac{-3}{3} \\
x<-1
\end{gathered}
$$

Por lo tanto, la solución es: $(-\infty,-1)$.

La gráfica del intervalo solución es:



2) $4x+10\geq 7x-4$

Solución:

$$
\begin{gathered}
4x+10-10\geq 7x-4-10 \\
4x\geq 7x-14 \\
4x-7x\geq 7x-7x-14 \\
-3x\geq -14 \\
\frac{-3x}{-3}\leq\frac{-14}{-3} \\
x\leq\frac{14}{3}
\end{gathered}
$$

Por lo tanto: $x\in\left(-\infty,\frac{14}{3}\right]$

De aquí en adelante, se utilizará el desarrollo directo como el que se da a continuación:

$$4x + 10 \geq 7x - 4$$
$$4x - 7x \geq -4 - 10$$
$$-3x \geq -14$$

los pasos siguientes son exactamente los mismos, es esta la razón por la que ya no se dan.

3) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x \leq -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$$
$$\frac{4x - 3x}{6} \leq \frac{-2 - 3}{4}$$
$$\frac{1}{6}x \leq -\frac{5}{4}$$
$$6\left(\frac{1}{6}x\right) \leq 6\left(-\frac{5}{4}\right)$$
$$x \leq -\frac{30}{4} = -\frac{15}{2}$$

La solución es: $x \in \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right]$.

4) $6 < 8x + 3 \leq 15$

$$6 - 3 < 8x + 3 - 3 \leq 15 - 3$$
$$3 < 8x \leq 12$$
$$\frac{3}{8} < \frac{8x}{8} \leq \frac{12}{8}$$
$$\frac{3}{8} < x \leq \frac{3}{2}$$

La solución es: $x \in \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}\right]$

Ejemplos de desigualdades en donde aparecen productos, cocientes o expresiones cuadráticas.

Para resolver este tipo de desigualdades, se hará uso de los puntos críticos o valores críticos, siendo estos aquellos valores de la variable para los cuales los factores lineales que aparezcan en la desigualdad se iguales con cero.

5) $(x - 3)(x + 3) \geq 0$

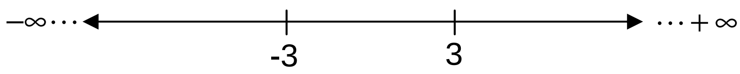
En primer lugar se iguales con cero los factores lineales

$$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

$$x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$$

luego los valores críticos son : $x=-3 \quad y \quad x=3$.

Al graficar estos puntos sobre la recta real se generan los intervalos que se muestran:



los intervalos que se forman son : $(-\infty,-3],\quad [-3,3] \quad y \quad [3,+\infty)$.

Ahora se obtendrá el signo de los factores de la desigualdad en cada uno de los intervalos, para tal efecto se le dan valores a la x de tal forma que estén dentro de cada uno de ellos.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Si} & x=-4 & \Rightarrow & (-)(-)=+ \ \clubsuit \\ & x=\ \ 0 & \Rightarrow & (-)(+)=- \\ \text{y} & x=\ \ 4 & \Rightarrow & (+)(+)=+ \ \clubsuit \end{array}$$

Luego, el signo del primer intervalo es positivo, el del segundo negativo y el del tercero positivo.

Ya que la desigualdad es mayor o igual que cero, entonces la solución es la unión de los intervalos en donde los signos hayan sido positivos; es decir, la solución es:

$$x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty) = R-(-3,3)$$

6) $(x-3)(x+3) \le 0$

En este ejemplo como la desigualdad es menor o igual que cero, la solución es el intervalo en donde el signo es negativo; es decir, la solución es:

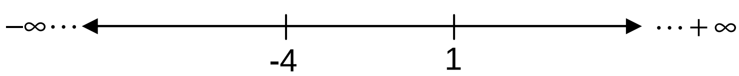
$$x \in [-3,3]$$

7) $x^2+3x-4>0$

La factorización es: $(x-1)(x+4)>0$

Luego los valores críticos son: $x=-4 \quad y \quad x=1$

la gráfica es :



los intervalos que se forman son : $(-\infty,-4),\quad (-4,1) \quad y \quad (1,+\infty)$.

El signo en cada intervalo, se da a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad x=-5 \quad &\Rightarrow \quad (-)(-)=+ \ \clubsuit \\ x= \ \ 0 \quad &\Rightarrow \quad (-)(+)=- \\ \text{y} \quad x= \ \ 2 \quad &\Rightarrow \quad (+)(+)=+ \ \clubsuit \end{aligned}$$

Ya que la desigualdad es mayor que cero, entonces la solución es la unión de los intervalos en donde los signos hayan sido positivos; es decir, la solución es:

$$x \in (-\infty,-4) \cup (1,+\infty) = \mathbb{R} - [-4,1]$$

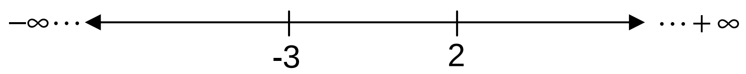
8) $\dfrac{x-2}{x+3} < 0$

Al igualar los factores con cero se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x-2=0 \quad &\Rightarrow \quad x=2 \\ x+3=0 \quad &\Rightarrow \quad x=-3 \end{aligned}$$

Luego los valores críticos son : $x=-3 \quad y \quad x=2$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $(-\infty,-3)$, $(-3,2)$ y $(2,+\infty)$.

El signo en cada intervalo, se da a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad x=-4 \quad &\Rightarrow \quad (-)/(-)=+ \\ x= \ \ 0 \quad &\Rightarrow \quad (-)/(+)=- \ \clubsuit \\ \text{y} \quad x= \ \ 3 \quad &\Rightarrow \quad (+)/(+)=+ \end{aligned}$$

Ya que la desigualdad es menor que cero, entonces la solución es el intervalo en donde el signo haya sido negativo; es decir, la solución es :

$$x \in (-3,2)$$

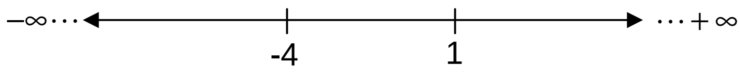
9) $\dfrac{1-x}{x+4} > 0$

Al igualar los factores con cero se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1-x=0 \quad &\Rightarrow \quad x=1 \\ x+4=0 \quad &\Rightarrow \quad x=-4 \end{aligned}$$

Luego los valores críticos son : $x = 1 \quad y \quad x = -4$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $(-\infty,-4), \quad (-4,1) \quad y \quad (1,+\infty)$.

El signo en cada intervalo, se da a continuación:

$$
\begin{aligned}
\text{Si } & x = -5 \quad \Rightarrow \quad (+)/(-) = - \\
& x = \ \ 0 \quad \Rightarrow \quad (+)/(+) = + \ \clubsuit \\
\text{y } & x = \ \ 2 \quad \Rightarrow \quad (-)/(+) = -
\end{aligned}
$$

Ya que la desigualdad es mayor que cero, entonces la solución es el intervalo en donde el signo es positivo; es decir, la solución es:

$$x \in (-4,1)$$

10) $\dfrac{x^2 - 5x}{x+3} < 0$

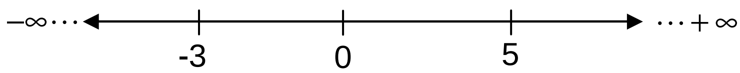
Solución:

$$\frac{x(x-5)}{x+3} < 0$$

$$
\begin{aligned}
x = 0 \quad & \Rightarrow \quad x = 0 \\
x - 5 = 0 \quad & \Rightarrow \quad x = 5 \\
\text{y } \ x + 3 = 0 \quad & \Rightarrow \quad x = -3
\end{aligned}
$$

Luego los valores críticos son : $x = -3, \quad x = 0 \quad y \quad x = 5$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $(-\infty,-3), \quad (-3,0), \quad (0,5) \quad y \quad (5,+\infty)$.

El signo en cada intervalo, se da a continuación:

$$
\begin{aligned}
\text{Si } & x = -4 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(-)(-)}{(-)} = - \quad \clubsuit \\
& x = \text{-}2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(-)(-)}{(+)} = + \\
& x = \ \ 1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(+)(-)}{(+)} = - \quad \clubsuit \\
\text{y } & x = \ \ 6 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(+)(+)}{(+)} = +
\end{aligned}
$$

Ya que la desigualdad es menor que cero, entonces la solución es la unión de los intervalos en donde el signo haya sido negativo; es decir, la solución es:

$$x \in (-\infty,-3) \cup (0,5)$$

11) $\dfrac{x+1}{x+3} < \dfrac{x}{x+1}$

Solución:

$$\frac{x-1}{x+3} - \frac{x}{x+1} < 0$$

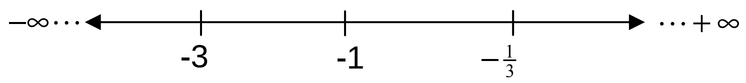
$$\frac{(x-1)(x+1) - x(x+3)}{(x+3)(x+1)} < 0$$

$$\frac{x^2 - 1 - x^2 - 3x}{(x+3)(x+1)} < 0$$

$$\frac{-1-3x}{(x+3)(x+1)} < 0$$

Luego los valores críticos son: $x = -\frac{1}{3}$, $\quad x = -3 \quad y \quad x = -1$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son :

$$(-\infty,-3), \quad (-3,-1), \quad (-1,-\tfrac{1}{3}) \quad y \quad (-\tfrac{1}{3},+\infty).$$

El signo en cada intervalo, se da a continuación:

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } x = -4 & \Rightarrow & \frac{(+)}{(-)(-)} = + \\
\quad x = \text{-}2 & \Rightarrow & \frac{(+)}{(+)(-)} = - \clubsuit \\
\quad x = \ \text{-}0.5 & \Rightarrow & \frac{(+)}{(+)(+)} = + \\
\text{y } \ x = \ 0 & \Rightarrow & \frac{(-)}{(+)(+)} = - \clubsuit
\end{array}$$

Ya que la desigualdad es menor que cero, entonces la solución es la unión de los intervalos en donde el signo haya sido negativo; es decir, la solución es:

$$x \in (-3,-1) \cup (-\tfrac{1}{3},+\infty)$$

A continuación se dan ejemplos en donde interviene el valor absoluto.

12) $|x-5|<10$

$$-10<x-5<10$$
$$-10+5<x-5+5<10+5$$
$$-5<x<15$$

Por lo tanto la solución es: $x\in(-5,15)$

13) $|6-2x|\le 14$

$$-14\le 6-2x\le 14$$
$$-14-6\le 6-2x-6\le 14-6$$
$$-20\le -2x\le 8$$
$$\frac{-20}{-2}\ge\frac{-2x}{-2}\ge\frac{8}{-2}$$
$$10\ge x\ge -4$$

Por lo tanto la solución es: $x\in[-4,10]$

14) $|9x-25|\ge 13$

$$9x-25\ge 13$$
$$9x\ge 13+25$$
$$9x\ge 38$$
$$\frac{9x}{9}\ge\frac{38}{9}$$
$$x\ge\frac{38}{9}$$
$$\therefore\quad x\in\left[\tfrac{38}{9},+\infty\right)$$

o

$$9x-25\le -13$$
$$9x\le -13+25$$
$$9x\le 12$$
$$\frac{9x}{9}\le\frac{12}{9}$$
$$x\le\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$
$$\therefore\quad x\in\left(-\infty,\tfrac{4}{3}\right]$$

Por lo tanto la solución es:

$$x\in\left(-\infty,\tfrac{4}{3}\right]\cup\left[\tfrac{38}{9},+\infty\right)=\mathbb{R}-\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{38}{9}\right)$$

15) $|5-7x|>10$

$$5-7x>10$$
$$-7x>10-5$$
$$\frac{-7x}{-7}<\frac{5}{-7}$$
$$x<-\frac{5}{7}$$
$$\therefore\quad x\in\left(-\infty,-\tfrac{5}{7}\right)$$

o

$$5-7x<-10$$
$$-7x<-10-5$$
$$-7x<-15$$
$$\frac{-7x}{-7}>\frac{-15}{-7}$$
$$x>\frac{15}{7}$$
$$\therefore\quad x\in\left(\tfrac{15}{7},+\infty\right)$$

Por lo tanto la solución es: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{7}\right) \cup \left(\frac{15}{7}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-\frac{5}{7}, \frac{15}{7}\right]$

16) $\left|x^2 + 3x - 1\right| \geq 3$

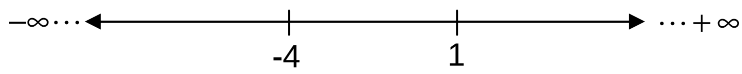
$$x^2 + 3x - 1 \geq 3 \qquad \text{o} \qquad x^2 + 3x - 1 \leq -3$$
$$x^2 + 3x - 1 - 3 \geq 0 \qquad\qquad x^2 + 3x - 1 + 3 \leq 0$$
$$x^2 + 3x - 4 \geq 0 \qquad\qquad x^2 + 3x + 2 \leq 0$$
$$(x+4)(x-1) \geq 0 \qquad\qquad (x+1)(x+2) \leq 0$$

Solución para la desigualdad

$$(x+4)(x-1) \geq 0$$

Los valores críticos son: $x = -4 \quad y \quad x = 1$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $(-\infty, -4]$, $[-4, 1]$ y $[1, +\infty)$.

El signo en cada intervalo, se da a continuación:

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x = -5 & \Rightarrow & (-)(-) = + \ \clubsuit \\ \quad x = \ \ 0 & \Rightarrow & (+)(-) = - \\ \text{y } x = \ \ 2 & \Rightarrow & (+)(+) = + \ \clubsuit \end{array}$$

Ya que la desigualdad es mayor que cero, entonces la solución es el intervalo en donde el signo es positivo; es decir, la solución es:

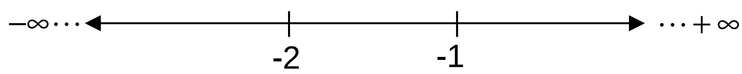
$$x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$$

Y la solución para la desigualdad

$$(x+1)(x+2) \leq 0$$

Los valores críticos son: $x = -2 \quad y \quad x = -1$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $(-\infty, -2]$, $[-2, -1]$ y $[-1, +\infty)$.

El signo en cada intervalo es:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Si} & x=-3 & \Rightarrow & (-)(-)=+ \\
 & x= -1.5 & \Rightarrow & (-)(+)=- \clubsuit \\
\text{y} & x= 0 & \Rightarrow & (+)(+)=+
\end{array}
$$

Ya que la desigualdad es menor que cero, entonces la solución es el intervalo en donde el signo es negativo, la solución es:

$$x \in [-2,-1]$$

Por lo tanto la solución es: $x \in (-\infty,-4] \cup [1,+\infty) \cup [-2,-1]$

17) $\left|x^2+3x-1\right|<3$

$$-3<x^2+3x-1<3$$

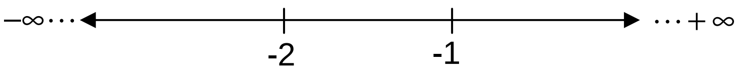
$$
\begin{array}{ccc}
-3<x^2+3x-1 & y & x^2+3x-1<3 \\
0<3+x^2+3x-1 & \text{y} & x^2+3x-1<3 \\
x^2+3x+2>0 & & x^2+3x-1-3<0 \\
(x+2)(x+1)>0 & & x^2+3x-4<0 \\
 & & (x+4)(x-1)<0
\end{array}
$$

Solución para la desigualdad

$$(x+2)(x+1)>0$$

Los valores críticos son: $x=-2 \quad y \quad x=-1$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$ y $(-1,+\infty)$.

El signo en cada intervalo, se da a continuación:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Si} & x=-3 & \Rightarrow & (-)(-)=+\clubsuit \\
 & x=-1.5 & \Rightarrow & (+)(-)=- \\
\text{y} & x= 0 & \Rightarrow & (+)(+)=+\clubsuit
\end{array}
$$

Ya que la desigualdad es mayor que cero, entonces la solución es el intervalo en donde el signo es positivo; es decir, la solución es:

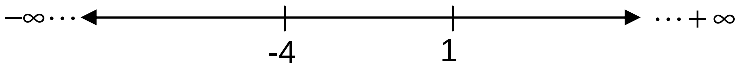
$$x \in (-\infty,-2) \cup (-1,+\infty)$$

Solución para la desigualdad

$$(x+4)(x-1)<0$$

Los valores críticos son: $x=-4 \quad y \quad x=1$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $(-\infty,-4)$, $(-4,1)$ y $(1,+\infty)$.

El signo en cada intervalo es:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Si } x=-5 & \Rightarrow & (-)(-)=+ \\
\quad x=\ \ 0 & \Rightarrow & (+)(-)=- \ \clubsuit \\
\text{y } x=\ \ 2 & \Rightarrow & (+)(+)=+
\end{array}
$$

Ya que la desigualdad es menor que cero, entonces la solución es el intervalo en donde el signo es negativo, la solución es:

$$x\in(-4,1)$$

Por lo tanto la solución es: $x\in\left[(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)\right]\cap(-4,1)$

18) $\left|\dfrac{x+5}{x-2}\right|<1$

$$-1<\frac{x+5}{x-2}<1$$

$$-1<\frac{x+5}{x-2} \qquad y \qquad \frac{x+5}{x-2}<1$$

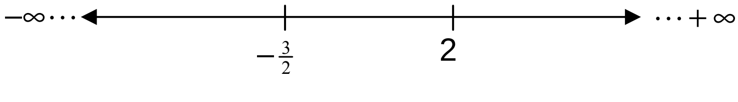
$$
\begin{array}{ccc}
-1<\dfrac{x+5}{x-2} & \text{y} & \dfrac{x+5}{x-2}<1 \\
0<\dfrac{x+5}{x-2}+1 & & \dfrac{x+5}{x-2}-1<0 \\
\dfrac{x+5+x-2}{x-2}>0 & & \dfrac{x+5-x+2}{x-2}<0 \\
\dfrac{2x+3}{x-2}>0 & & \dfrac{7}{x-2}<0
\end{array}
$$

Solución para la desigualdad

$$\frac{2x+3}{x-2}>0$$

Los valores críticos son: $x=-\frac{3}{2}$ y $x=2$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $(-\infty,-\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2},2)$ y $(2,+\infty)$.

El signo en cada intervalo, se da a continuación:

$$\text{Si } x=-2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(-)}{(-)}=+ \ \clubsuit$$

$$x=\ 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(+)}{(-)}=-$$

$$\text{y } x=\ 3 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(+)}{(+)}=+ \ \clubsuit$$

Ya que la desigualdad es mayor que cero, entonces la solución es el intervalo en donde el signo es positivo; es decir, la solución es:

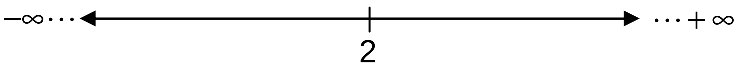
$$x\in\left(-\infty,-\tfrac{3}{2}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$$

Y la solución para la desigualdad

$$\frac{7}{x-2}<0$$

El valor crítico es: $x=-2$.

La gráfica es:



los intervalos que se forman son : $\left(-\infty,2\right)$ y $\left(2,+\infty\right)$.

El signo en cada intervalo es:

$$\text{Si } x=0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(x)}{(-)}=- \ \clubsuit$$

$$x=3 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{(x)}{(+)}=+$$

Ya que la desigualdad es menor que cero, entonces la solución es el intervalo en donde el signo es negativo, la solución es:

$$x\in\left(-\infty,2\right)$$

Por lo tanto la solución es: $x\in\left[\left(-\infty,-\tfrac{3}{2}\right)\cup\left(2,+\infty\right)\right]\cap\left(-\infty,2\right)=\left(-\infty,-\tfrac{3}{2}\right)$

3.6 Ejercicios

I) Obtenga los valores absolutos que se dan:

1. $|3-10|=$
2. $|10-110|=$
3. $|20-50|-|4-15|=$
4. $|35+55|-|10-150|=$
5. $||20-50|-|4-15||=$
6. $||1-5|+|3-8||=$
7. $||-50|-|4+15||-|-10|=$
8. $|-55|-||24+6|+|1-11||=$
9. $||3-10|+|-15||+|28-7|=$

II) Realizar la unión, la intersección y la resta en ambos sentidos y construir las gráficas para cada pareja de intervalos que se dan:

1. $A=\left(-5,7\right)$ y $B=\left(-3,10\right)$
2. $C=\left(0,5\right)$ y $D=\left(-2,8\right)$

3. $E = [-1,6] \quad y \quad F = [0,8]$
4. $G = (-\infty,0] \quad y \quad H = (-3,+\infty)$
5. $J = (-\infty,4] \quad y \quad K = [4,+\infty)$
6. $L = (-\infty,7) \quad y \quad M = (7,+\infty)$

III) Resolver las desigualdades que se dan:

1) $6x-4>8-x$

2) $x+7\geq 10x-3$

3) $\frac{3}{4}x-8\leq\frac{1}{2}x+15$

4) $\frac{1}{2}-3x>\frac{4}{5}+5x$

5) $(x-5)(x+4)>0$

6) $(x+6)(x-9)<0$

7) $x^2-1\leq 0$

8) $1-x^2\leq 0$

9) $4-x^2\leq 0$

10) $x^2>x+2$

11) $x^2<6x$

12) $9\leq x^2$

13) $\frac{x}{x+2}>0$

14) $\frac{x-6}{x-1}<0$

15) $\frac{2x-8}{x-2}>0$

16) $\frac{2-x}{x+5}<0$

17) $\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}<0$

18) $\frac{x-8}{(x-1)(3-x)}<0$

19) $\frac{1}{x}>2$

20) $\frac{4}{x}<1$

21) $\frac{x-3}{x}<\frac{x+5}{x-1}$

22) $\frac{x+1}{1-x}>\frac{x-1}{x+4}$

23) $|6x-1|<9$

24) $|8-x|\leq 0$

25) $|1-10x|\leq -4$

26) $|6x+12|\leq 7$

27) $|3x+7|\geq 10$

28) $|x-7|\geq 0$

29) $|6-3x|>1$

30) $|x^2-5x-1|<5$

31) $\left|x^2-5x-1\right|>5$

32) $\left|x^2+4x-1\right|\leq 4$

33) $\left|x^2+2x-2\right|\geq 6$

34) $\left|x+3\right|<7-2x$

35) $\left|x+3\right|>7-2x$

36) $\left|-x\right|\leq 5+x$

37) $\left|-x\right|\geq 5+x$

38) $\left|\frac{x+2}{2x+1}\right|\leq 2$

39) $\left|\frac{x+1}{x-2}\right|<10$

40) $\left|\frac{x+3}{x-5}\right|>8$

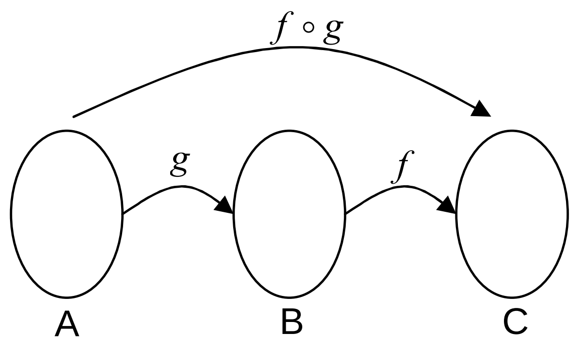
UNIDAD 4

FUNCIONES

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno será capaz de:

- ♦ Comprender el concepto de función para modelar algunos fenómenos del mundo real.
- ♦ Encontrar la descripción matemática de sus elementos principales: Dominio. Gráfica y rango.
- ♦ Realizar operaciones con funciones.
- ♦ Graficar funciones identificando sus elementos principales.



4. Funciones

Se puede decir que todas las ciencias que utilizan las matemáticas las emplean principalmente para estudiar relaciones, y en las experiencias de la vida diaria nos encontramos constantemente con situaciones en las que intervienen magnitudes dependientes unas de otras.

Los físicos, biólogos, químicos. Ingenieros, economistas, etc., buscan esclarecer las conexiones entre los diversos elementos de su campo para llegar a comprender porque esos elementos tienen determinado comportamiento.

Por ejemplo, si se realiza un experimento para determinar si existe o no una relación entre la distancia recorrida por un objeto al caer y el tiempo recorrido en dicha caída, la observación nos indicará (al menos aproximadamente) que $S=4.9.t^2$, donde S es la distancia en metros y t es el tiempo en segundos. Observaríamos que la caída del objeto, la distancia y el tiempo están relacionados.

Otros ejemplos en donde se manejan relaciones son: La asociación del peso de una carta y la cantidad de sellos postales que tiene que comprar, la relación entre el número de kilómetros por litro de gasolina que consume un automóvil y la velocidad a la que se conduce, el peso que un hombre puede levantar depende directamente, al igual que de otros factores, de su fuerza. Análogamente podemos decir que el área de un cuadrado depende de la longitud de sus lados y que el volumen de una esfera depende de su diámetro. Consideraciones como estas conducen al concepto matemático de función, siendo este uno de los conceptos más importantes en la matemática.

4.1. Definición, dominio, contradominio y rango.

Definición de función:

Si a todo elemento "x" de un conjunto A se le hace corresponder un único elemento "y" de de un conjunto B. Se dice que esta correspondencia es una función.

Todos los posibles valores de x forman el **dominio de la función** y todos los posibles valores de y forman el **rango de la función**. Además a la x se le llama variable independiente (dado que x puede tomar cualquier valor, siempre que el valor elegido de como resultado un número real para "y"). De la misma forma a la y se le llama variable dependiente, ya que una vez elegido el valor de x, queda determinado el valor de y ; esto es, y depende de x.

La notación que se usa es:

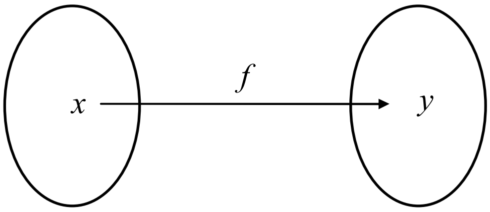
$$f : A \to B \qquad (f \text{ de A en B})$$

en donde al conjunto A se le llama dominio de la función y al conjunto B se le llama contradominio de la función.

Si a un elemento x de A se le asocia un único elemento y de B, se dice que y es la imagen de x. Su notación es:

$$f(x) = y \qquad (f \text{ de } x \text{ igual a } y)$$

Representación geométrica:

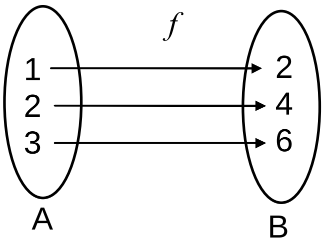


Al conjunto de todas las imágenes del dominio de la función se le llama **rango de la función**.

Ejemplos

Decir cuáles de las correspondencias que se dan son funciones o no.

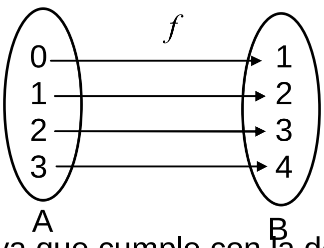
1)



Si es función, ya que a cada elemento de A se le asocia un único elemento de B.

- $f(1) = 2$; 2 es imagen de 1
- $f(2) = 4$; 4 es imagen de 2 El rango = $R_f = \{2,4,6\}$
- $f(3) = 6$; 6 es imagen de 3

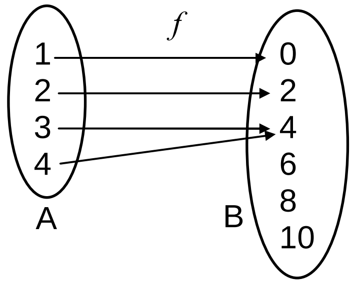
2)



Si es función, ya que cumple con la definición.

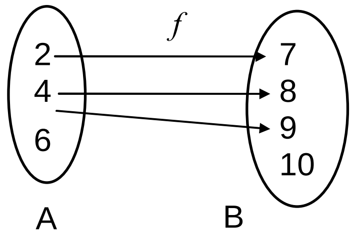
- $f(0) = 1$; 1 es imagen de 0
- $f(1) = 2$; 2 es imagen de 1 El rango = $R_f = \{1,2,3,4\}$
- $f(2) = 3$; 3 es imagen de 2
- $f(3) = 4$; 4 es imagen de 3

3)



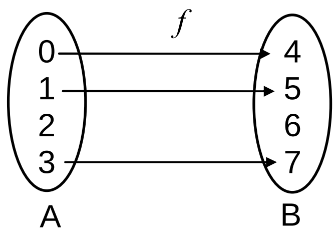
Si es función
El rango= $R_f = \{0, 2, 4\}$

4)



No es función ya que al 4 del dominio se le asocian dos elementos en el contradominio, siendo estos el 8 y el 9.

5)



No es función ya que al 2 del dominio no se le asocian un único elemento en el contradominio.

6) A los alumnos del grupo 418 en el CCH se les asocia su calificación final en matemáticas III.
Si es función, el dominio son todos los alumnos del grupo y el rango es {N.P, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

7) A los alumnos de una escuela se les asocia su tipo de sangre.
Si es función, el dominio son los alumnos de la escuela y el rango es el conjunto {O, A, B, AB} .

8) A cada palabra se le asocia su sinónimo.
No es función, dado que a una palabra se le pueden asociar varias.

9) A cada automóvil de México se le asocia su número de placa.
Si es función, el dominio son todos los automóviles de México y el rango son todos los números de placas.

10) A cada persona se le asocia con su automóvil.
No es función, dado que una persona puede tener más de un automóvil y otras no tienen ninguno.

11) A cada figura geométrica se le asocia su área.

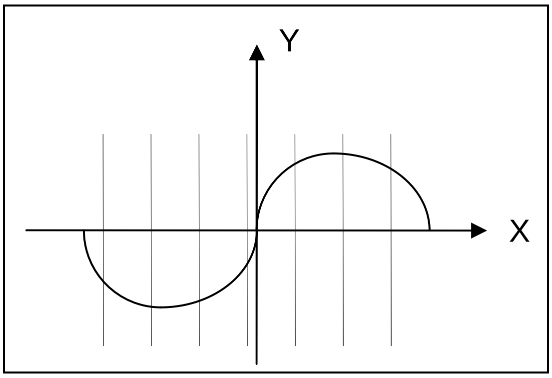
Si es función, el dominio son todas las figuras geométricas y el rango es el intervalo $[0,+\infty)$.

A continuación se darán algunos ejemplos que serán de utilidad para distinguir desde el punto de vista geométrico cuando una curva representa a la gráfica de una función. Para este tipo de ejemplos es importante notar que, como para cada x en el dominio existe un único valor $f(x)$, entonces existe un punto sobre la gráfica con abscisa x o de otra forma, una curva representa a la gráfica de una función, si al trazar líneas paralelas al eje Y, del plano coordenado, éstas intersectan a lo más en un punto a la gráfica (en el plano coordenado el dominio está sobre el eje X y el rango sobre el eje Y).

Ejemplos

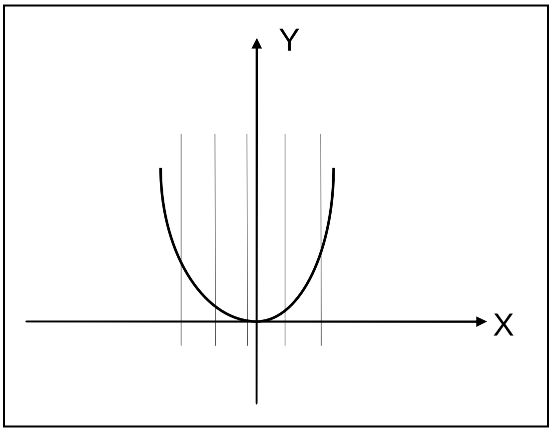
Decir cuáles de las curvas que se dan, representan a la gráfica de una función o no.

1)



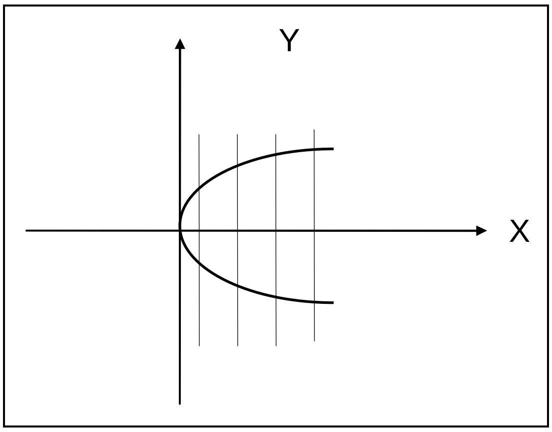
Como se puede observar al trazar líneas paralelas al eje Y, éstas intersectan en a lo más en un punto a la curva dada. Luego si representa la gráfica de una función.

2)



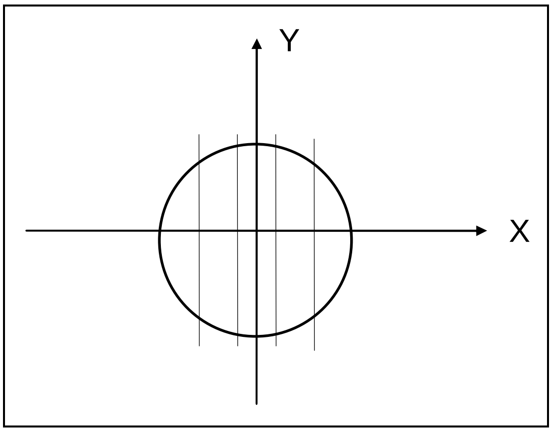
Como se puede observar al trazar líneas paralelas al eje Y, éstas intersectan a lo más en un punto a la curva dada. Luego si representa la gráfica de una función.

3)



Al trazar líneas paralelas al eje Y, éstas intersectan en dos puntos a la curva dada. Luego no representa la gráfica de una función.

4)



Al trazar líneas paralelas al eje Y, éstas intersectan en dos puntos a la curva dada. Luego no representa la gráfica de una función.

Observación. *Haciendo uso de la gráfica de una función el rango es el intervalo que tiene su origen en el punto donde inicia la gráfica de la función y, que termina en el punto donde finaliza la gráfica de la función, esto es considerando como eje de referencia al eje Y o* $f(x)$ *.*

4.2. Tipos de funciones y sus gráficas.

4.2.1. Funciones polinomiales.

Función constante

Las funciones constantes son de la forma:

$$f(x) = c$$

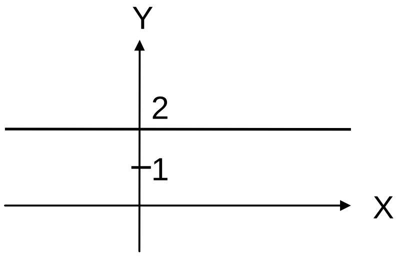
en donde c es una constante. El dominio es $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = \{c\}$. La gráfica es una recta paralela al eje X y pasa por el valor de c .

Ejemplos

Dar el dominio, hacer la gráfica y decir cuál es el rango para cada función constante que se da:

1) $f(x) = 2$

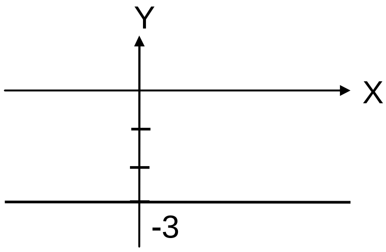
La gráfica es:



El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = \{2\}$

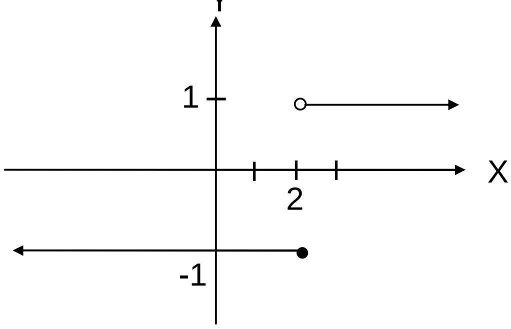
2) $f(x) = -3$

El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = \{-3\}$. La gráfica es la que se muestra:



3) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

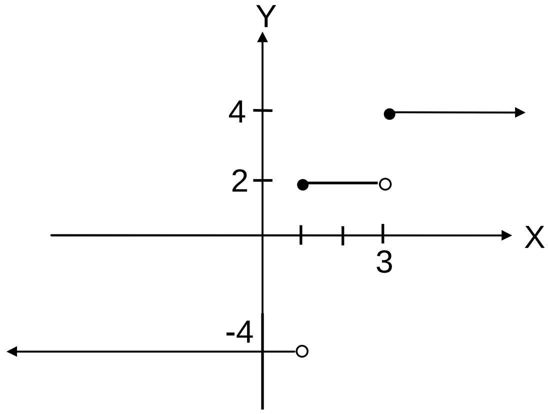
Gráfica, dominio y rango:



El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = \{-1, 1\}$

4) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

Gráfica, dominio y rango:



El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = \{-4, 2, 4\}$

Funciones lineales

Estas funciones son de la forma:

$$f(x) = ax + b$$

en donde a y b son constantes ($a \neq 0$) y x es la variable. El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = \mathbb{R}$. La gráfica de este tipo de funciones son líneas rectas.

Se recuerda que para graficar líneas rectas son suficientes dos puntos.

Ejemplos

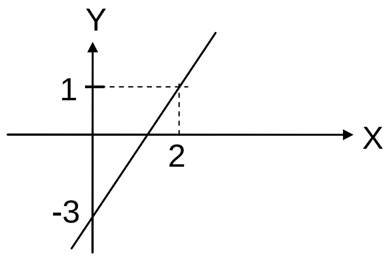
Dar el dominio, hacer la gráfica y decir cuál es el rango para cada función que se da:

1) $f(x) = 2x - 3$

x	$f(x) = 2x - 3$	puntos
0	$f(0) = -3$	(0,-3)
2	$f(2) = 1$	(2,1)

El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = \mathbb{R}$

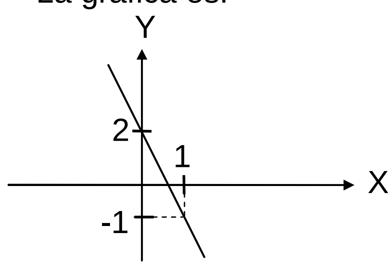
La gráfica es:



2) $f(x) = 2 - 3x$

x	$f(x) = 2 - 3x$	puntos
0	$f(0) = 2$	(0,2)
1	$f(1) = -1$	(1,-1)

La gráfica es:



El $D_f = \mathbb{R} = R_f$

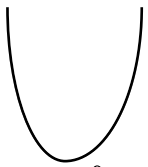
Función cuadrática

Estas funciones son de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

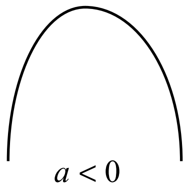
en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$. El $D_f = \mathbb{R}$.

Las gráficas son curvas de la forma:



$a > 0$

o



$a < 0$

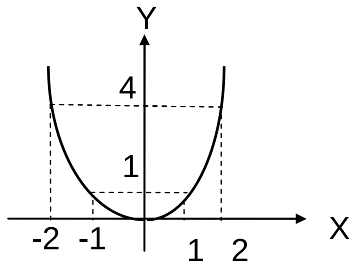
A este tipo de curvas se les llama **parábolas**

Ejemplos

Dar el dominio, hacer la gráfica y decir cuál es el rango para cada función que se da:

1) $f(x) = x^2$

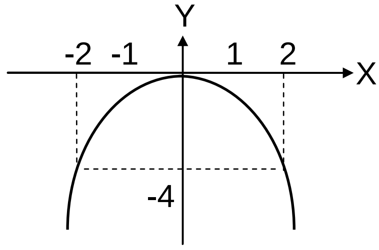
x	$f(x) = x^2$	Puntos
-2	$f(-2) = 4$	(-2,4)
-1	$f(-1) = 1$	(-1,1)
0	$f(0) = 0$	(0,0)
1	$f(1) = 1$	(1,1)
2	$f(2) = 4$	(2,4)



El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = [0, +\infty)$

2) $f(x) = -x^2$

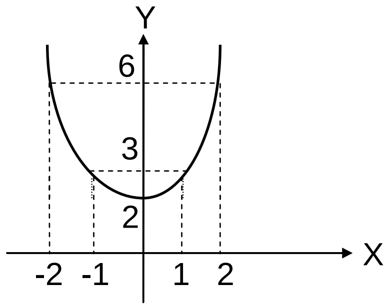
x	$f(x) = -x^2$	Puntos
-2	$f(-2) = -4$	(-2,-4)
-1	$f(-1) = -1$	(-1,-1)
0	$f(0) = 0$	(0,0)
1	$f(1) = -1$	(1,-1)
2	$f(2) = -4$	(2,-4)



El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = (-\infty, 0]$

3) $f(x) = x^2 + 2$

x	$f(x) = x^2 + 2$	Puntos
-2	$f(-2) = 6$	(-2,6)
-1	$f(-1) = 3$	(-1,3)
0	$f(0) = 2$	(0,2)
1	$f(1) = 3$	(1,3)
2	$f(2) = 6$	(2,6)



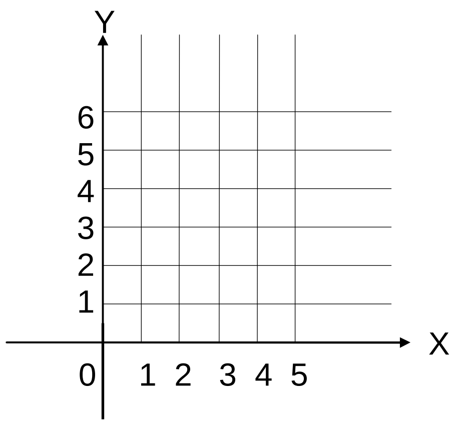
El $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = [2, +\infty)$

4) En los ejemplos que se dan a continuación, el dominio para todas ellas son todos los reales, construir la gráfica y decir cual es el rango en cada caso :

a) $f(x) = (x-2)^2$

X	$f(x) = (x-2)^2$	Puntos
0		
1		
2		
3		
4		

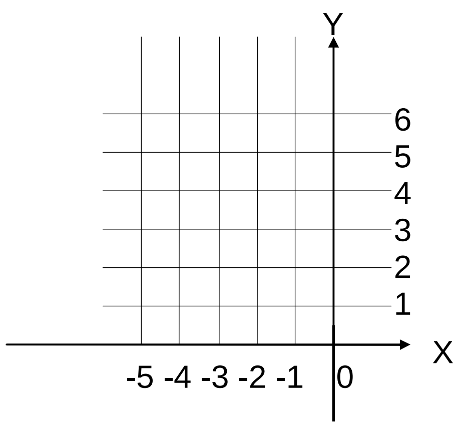
$R_f =$ ____________



b) $f(x) = (x+2)^2$

X	$f(x) = (x+2)^2$	puntos
-4		
-3		
-2		
-1		
0		

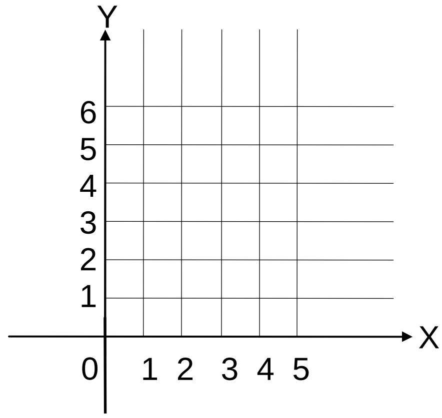
$R_f =$ ____________



c) $f(x) = (x-3)^2 + 2$

X	$f(x) = (x-3)^2 + 2$	puntos
1		
2		
3		
4		
5		

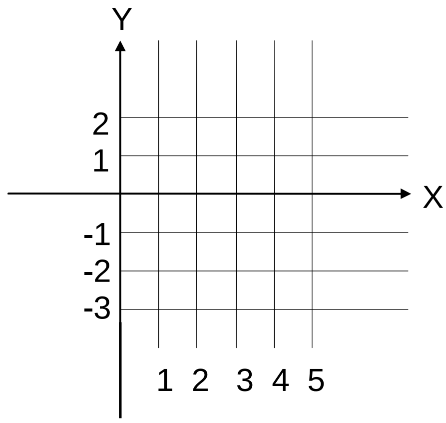
$R_f =$ ____________



d) $f(x) = 2-(x-1)^2$

X	$f(x) = 2-(x-1)^2$	puntos
-1		
0		
1		
2		
3		

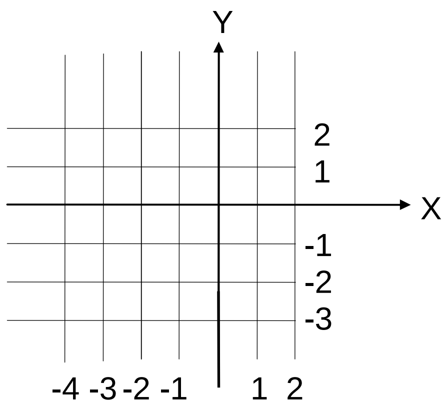
$R_f =$ ____________



e) $f(x) = 1-(x+1)^2$

X	$f(x) = 1-(x+1)^2$	puntos
-3		
-2		
-1		
0		
1		

$R_f =$ ____________



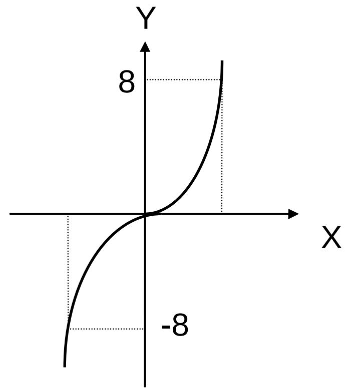
Función Cúbica

El dominio de todas las funciones cúbicas son todos los reales al igual que el rango.

Ejemplos

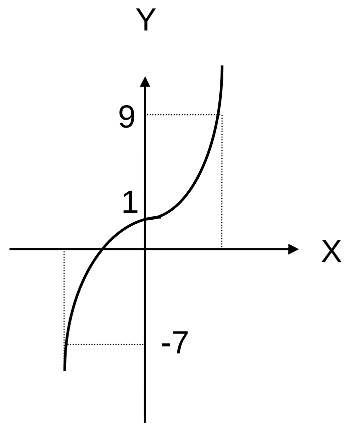
Graficar las funciones que se dan:

1) $f(x) = x^3$



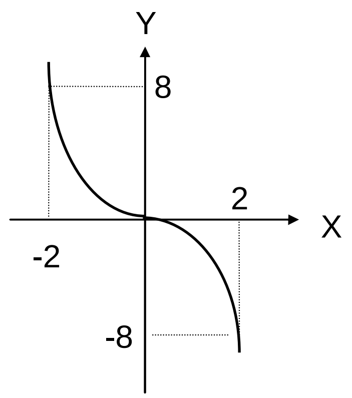
x	$f(x) = x^3$	puntos
-2	$(-2)^3$=8	(-2,8)
-1	$(-1)^3$=1	(-1,-1
0	0^3=0	(0,0)
1	1^3=1	(1,1)
2	2^3=8	(2,8)

2) $f(x) = x^3 + 1$



x	$f(x) = x^3 + 1$	puntos
-2	$(-2)^3$+1=-7	(-2,-7)
-1	$(-1)^3$+1=0	(-1,0)
0	0^3+1=1	(0,1)
1	1^3+1=2	(1,2)
2	2^3+1=9	(2,9)

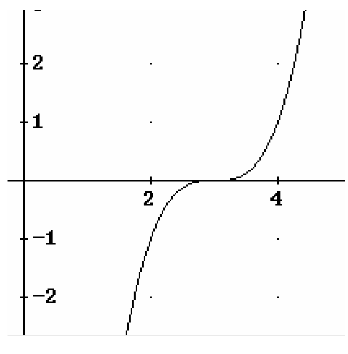
3) $f(x) = -x^3$



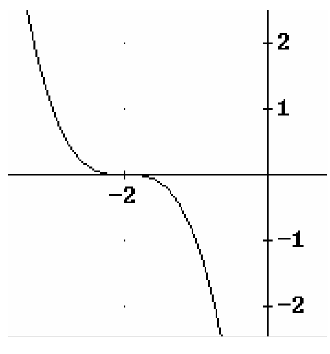
x	$f(x) = x^3$	puntos
-2	$-(-2)^3$=8	(-2,8)
-1	$-(-1)^3$=1	(-1,-1
0	0^3=0	(0,0)
1	-1^3=-1	(1,-1)
2	-2^3=-8	(2,-8)

A continuación se dan directamente las gráficas de varias funciones, utilizando las ideas que se deducen de los ejemplos anteriores.

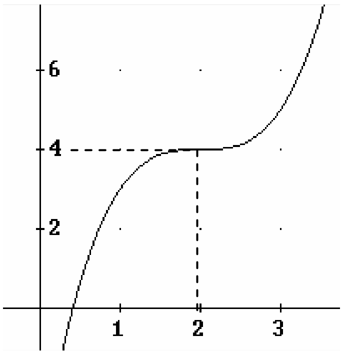
4) $f(x) = (x-3)^3$



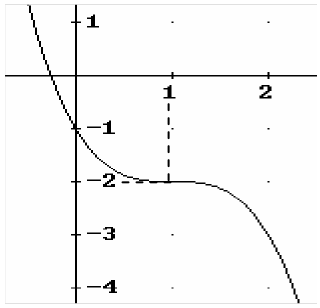
5) $f(x) = -(x+2)^3$



6) $f(x)=(x-2)^3+4$



7) $f(x)=-2-(x-1)^3$



4.2.2. Funciones con valor absoluto

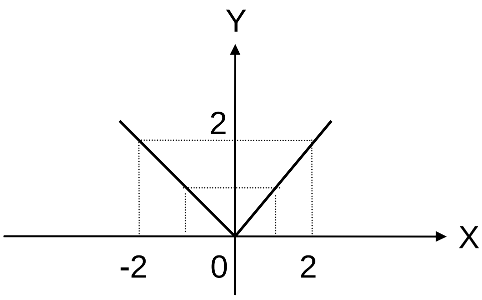
El dominio de cualquier función en donde aparezca el valor absoluto como las que se trabajarán en este material son los números reales, por tal razón en los ejemplos siguientes se pide graficar las funciones y dar el rango para cada una de ellas.

Ejemplos.

Construir la gráfica y dar el rango para cada función.

1) $f(x)=|x|$

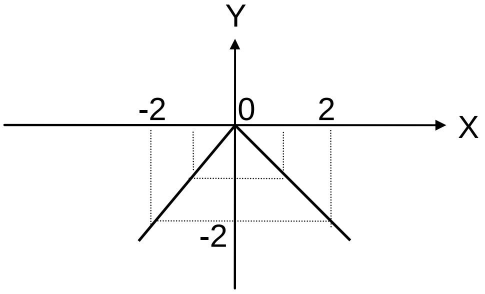
x	$f(x)=\|x\|$	puntos
-2	2	(-2,2)
-1	1	(-1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)



El R_f = $[0,+\infty)$

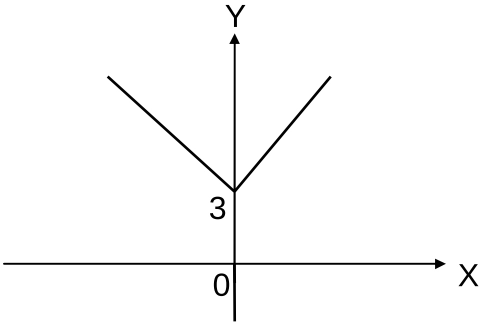
2) $f(x)=-|x|$

x	$f(x) = -\|x\|$	puntos
-2	-2	(-2,-2)
-1	-1	(-1,-1)
0	0	(0,0)
1	-1	(1,-1)
2	-2	(2,-2)



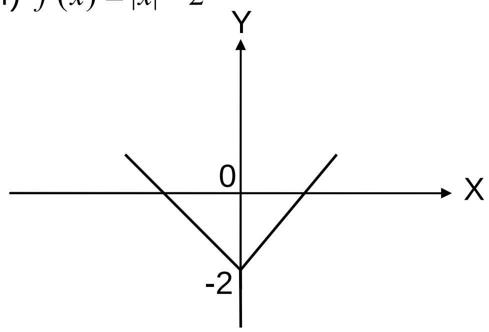
El R_f = $(-\infty, 0]$

3) $f(x) = |x| + 3$



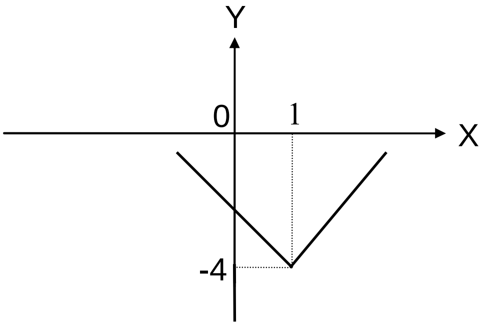
El R_f = $[3, +\infty)$

4) $f(x) = |x| - 2$



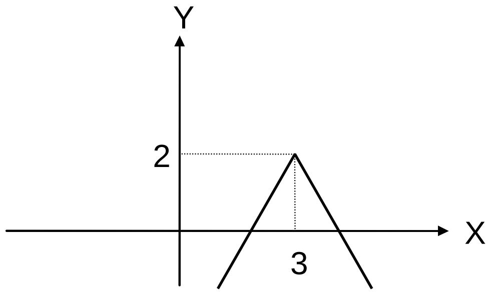
El R_f = $[-2, +\infty)$

5) $f(x) = |x-1| - 4$



El R_f = $[-4, +\infty)$

6) $f(x) = 2 - |3 - x|$



El R_f = $(-\infty, 2]$

4.2.3. Funciones con radicales

Las funciones que serán trabajadas son de la forma:

$$f(x) = \sqrt{ax+b} \quad \text{y} \quad f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

en donde a, b y c son constantes arbitrarias.

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{ax+b}$ se obtiene al darle solución a la desigualdad $ax + b \geq 0$ y el dominio de la función $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ es el intervalo formado por todos los valores que son solución de la desigualdad $ax^2 + bx + c \geq 0$. El rango para estas funciones se encuentra después de construir la gráfica.

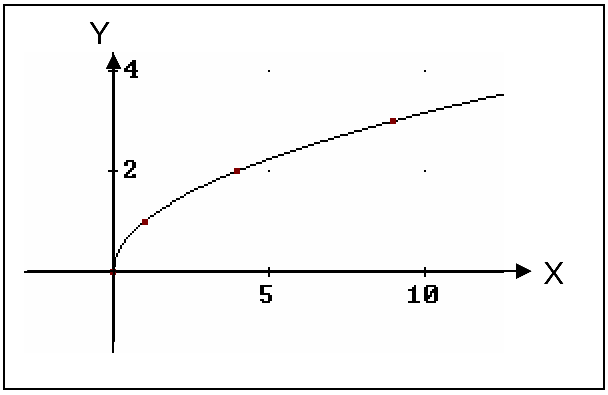
Ejemplos:

Para cada una de las funciones que se dan, obtenga el dominio, construya la gráfica e indique el rango.

1) $f(x)=\sqrt{x}$

El dominio de la función son todas las $x \geq 0$, es decir: $D_f=[0,+\infty)$. Para construir la gráfica usamos la tabla que se da:

x	$f(x)=\sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3



El $R_f=[0,+\infty)$

2) $f(x)=\sqrt{x-2}$

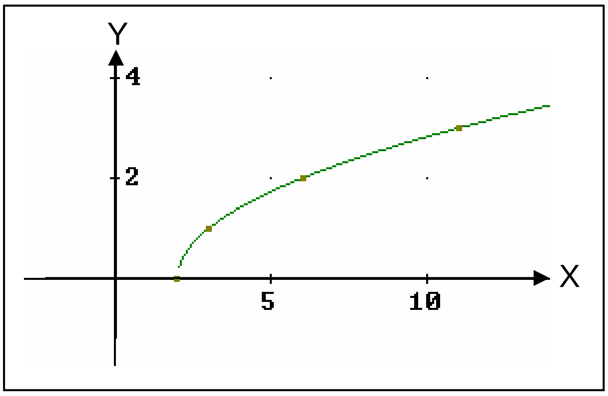
Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$x-2 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

luego el $D_f=[2,+\infty)$.

x	$f(x)=\sqrt{x-2}$
2	0
3	1
6	2
11	3



El $R_f=[0,+\infty)$

3) $f(x)=\sqrt{2x+6}$

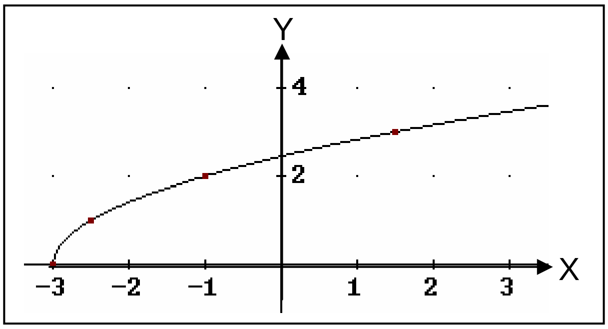
Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$2x+6 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{6}{2} = -3$$

luego el $D_f = [-3,+\infty)$.

x	$f(x)=\sqrt{2x+6}$
-3	0
-2.5	1
-1	2
1.5	3

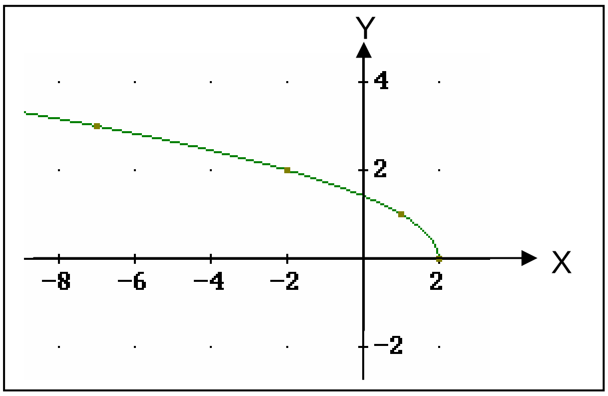


El $R_f = [0,+\infty)$

4) $f(x)=\sqrt{2-x}$

El dominio de la función es: $D_f = (-\infty,2]$.

x	$f(x)=\sqrt{2-x}$
-7	3
-2	2
1	1
2	0

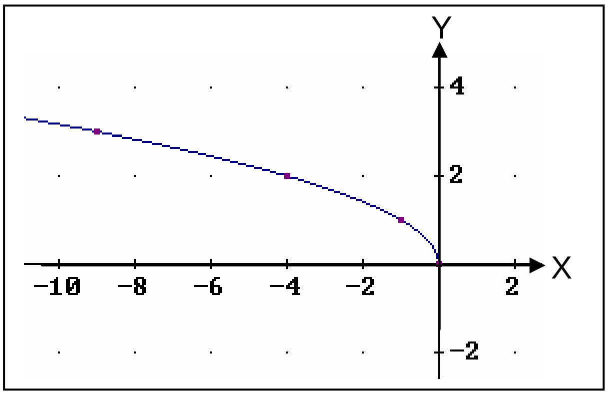


El $R_f = [0,+\infty)$

5) $f(x)=\sqrt{-x}$

El dominio de la función es: $D_f = (-\infty,0]$.

x	$f(x)=\sqrt{-x}$
-9	3
-4	2
-1	1
0	0



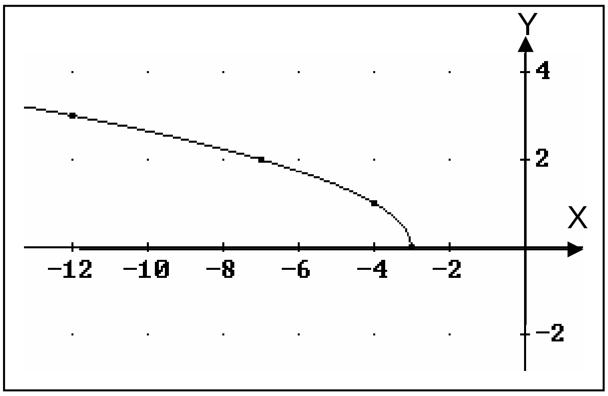
El $R_f = [0,+\infty)$

6) $f(x)=\sqrt{-x-3}$

El dominio de la función es: $D_f=(-\infty,-3]$.

x	$f(x)=\sqrt{-x-3}$
-12	3
-7	2
-4	1
-3	0

El $R_f=[0,+\infty)$



Observemos que los seis ejemplos trabajados son funciones de la forma $f(x)=\sqrt{ax+b}$. En los primeros tres el coeficiente de la x es positiva; es decir, $a>0$ y en los siguientes tres (4,5 y 6) $a<0$; es decir, el coeficiente de la x es negativa. Ahora si analizamos las gráficas de este tipo de funciones cuando $a>0$, nos damos cuenta que las gráficas están orientadas hacia la derecha y cuando $a<0$ las gráficas están orientadas hacia la izquierda, debe ser claro que en ambos casos las gráficas deben estar contenidas en el intervalo representado por el dominio para cada función.

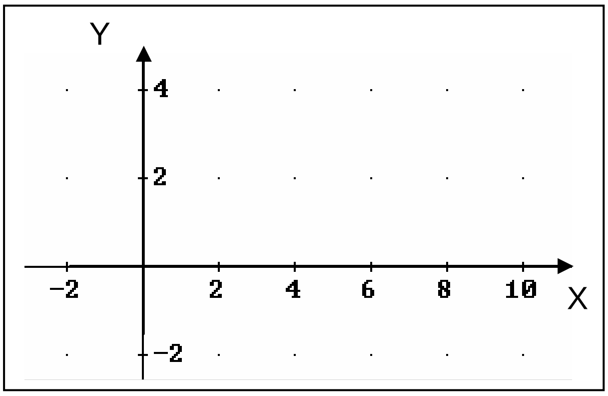
7) Para cada una de las funciones que se indican: obtenga el dominio, construya su gráfica sin darle valores a la x y diga cuál es el rango.

a) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

$2x-5\geq 0$

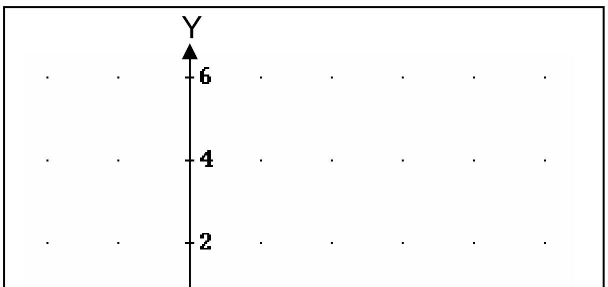
El $D_f=$ __________

El $R_f=$ __________



b) $f(x)=\sqrt{3x+7}$

$3x+7\geq 0$

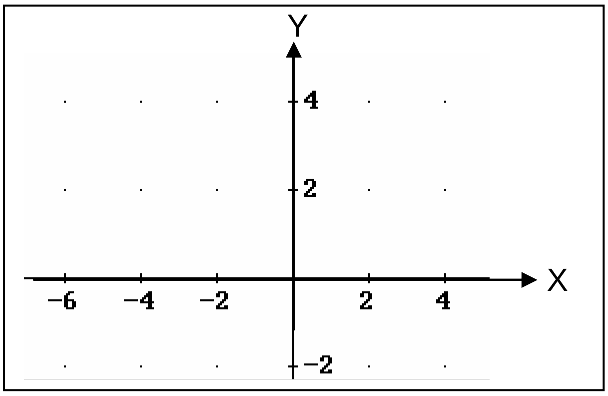


El D_f = __________

El R_f = __________

c) $f(x)=\sqrt{6-2x}$

$6-2x\geq 0$

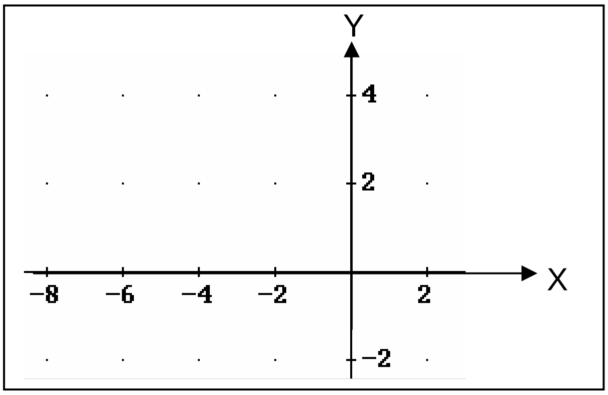


El D_f = __________

El R_f = __________

d) $f(x)=\sqrt{-5-3x}$

$-5-3x\geq 0$



El D_f = __________

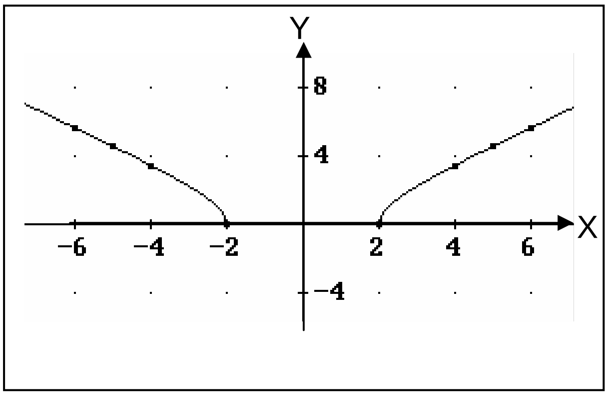
El R_f = __________

A continuación se darán ejemplos de funciones de la forma $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

Al resolver la desigualdad $x^2-4\geq 0$ se obtiene que el $D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

x	$f(x)=\sqrt{x^2-4}$
-6	5.6
-5	4.5
-4	3.4
-2	0
2	0
4	3.4
5	4.5
6	5.6

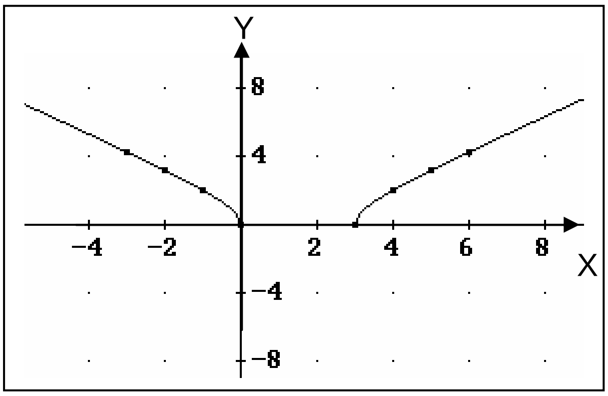


El $R_f=[0,+\infty)$

9) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$

Al resolver la desigualdad $x^2-3x\geq 0$ se obtiene que el $D_f=(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$.

x	$f(x)=\sqrt{x^2-3x}$
-3	4.2
-2	3.1
-1	2
0	0
3	0
4	2
5	3.1
6	4.2

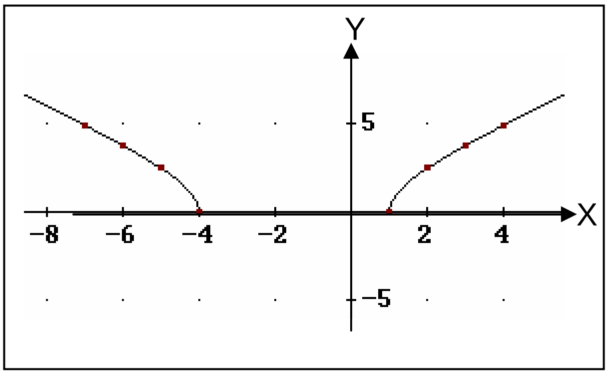


El $R_f=[0,+\infty)$

10) $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

El dominio para esta función es: $D_f=(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$

x	$f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$
-7	4.8
-6	3.7
-5	2.4
-4	0
1	0
2	2.4
3	3.7



4	4.8

El $R_f = [0,+\infty)$

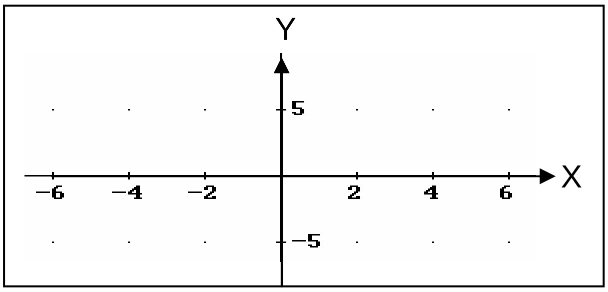
Observemos que en estos tres ejemplos el coeficiente de la x es positivo, es decir: $a \geq 0$, el dominio fue la unión de los intervalos de los extremos y que las gráficas son curvas que se abren hacia los costados.

11) En cada una de las funciones que se indican, encuentre el dominio, construya la gráfica sin darle valores a la x y diga cuál es el rango.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

El $D_f =$ __________

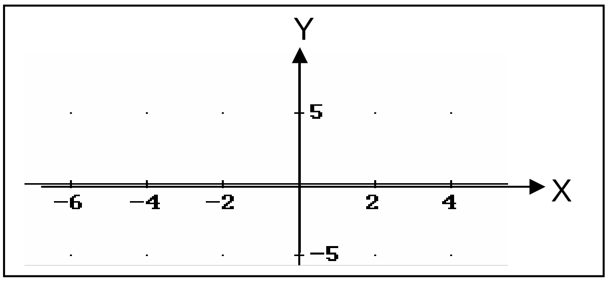
El $R_f =$ __________



b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

El $D_f =$ __________

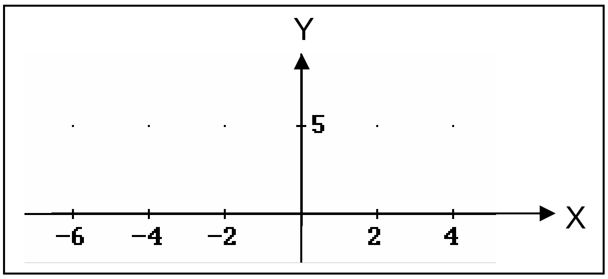
El $R_f =$ __________



c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

El $D_f =$ __________

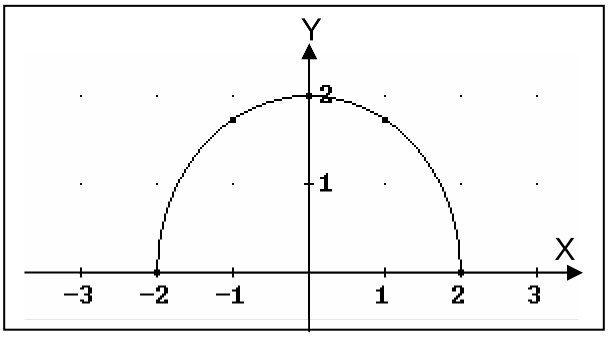
El $R_f =$ __________



12) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Al resolver la desigualdad $4 - x^2 \geq 0$, el dominio es: $D_f = [-2, 2]$.

x	$f(x)=\sqrt{4-x^2}$
-2	0
-1	1.7
0	2
1	1.7
2	0

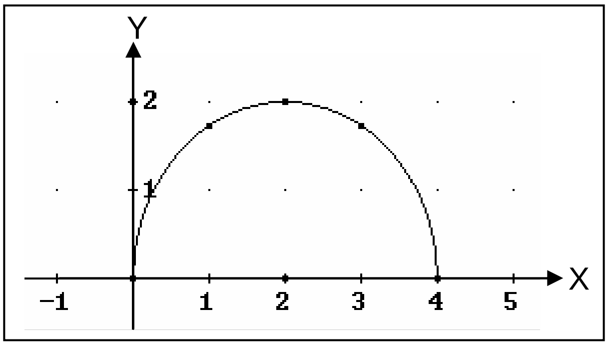


El $R_f = [0,2]$

13) $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$

El dominio de la desigualdad es: $D_f = [0,4]$.

x	$f(x)=\sqrt{4x-x^2}$
0	0
1	1.73
2	2
3	1.73
4	0

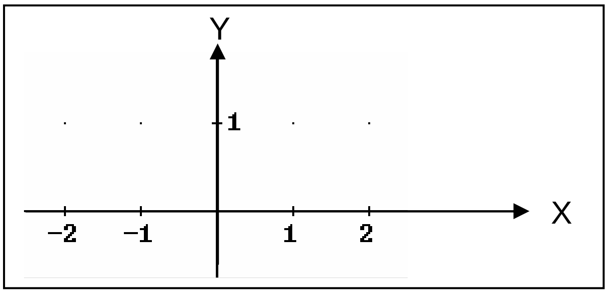


El $R_f = [0,2]$

Observemos que en los ejemplos 12 y 13 el coeficiente de la x^2 es negativo, es decir: $a \leq 0$, que el dominio es el intervalo de en medio (recuerde que estos intervalos se forman con los valores críticos) y que las gráficas son medias circunferencias.

14) En cada una de las funciones que se indican, encuentre el dominio, construya la gráfica sin darle valores a la x y diga cuál es el rango.

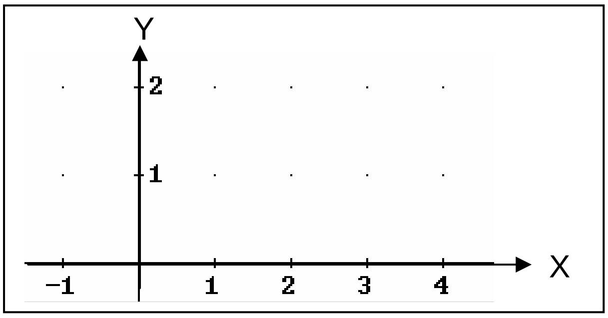
a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$



El $D_f =$ __________

El $R_f =$ __________

b) $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$

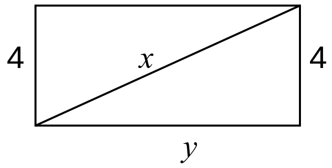


El $D_f =$ __________

El $R_f =$ __________

4.2.3.1. Aplicaciones de las funciones con radicales

1) Supóngase que se tiene un terreno rectangular cuyo ancho mide 4 metros, el largo mide y metros y que una de sus diagonales mide x metros.



   a) Represente a la y en términos de la x o como una función de x. ¿Cuál es su dominio?.
   b) Construya la gráfica.
   c) Si $x = 10m$. Obtenga la medida de $y = f(x)$.

Solución.

a) Por el teorema de Pitágoras

$$y^2 + 4^2 = x^2$$
$$y^2 = x^2 - 16$$
$$y = \sqrt{x^2 - 16}$$

y si $y = f(x)$, entonces la función es:

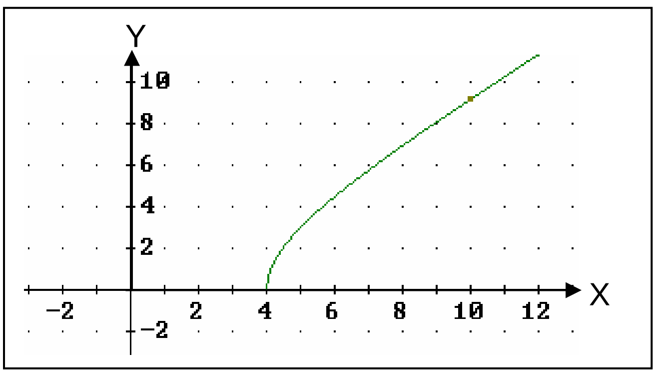
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$$

al resolver la desigualdad $x^2 - 16 \geq 0$, se obtiene que la solución es:

$$x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$$

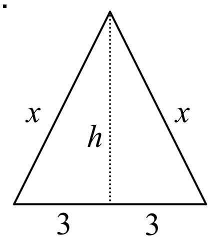
pero como x no puede tomar valores negativos el $D_f = [4, +\infty)$.

b) La gráfica es:



c) $y = f(10) = \sqrt{10^2 - 16} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 9.16m$. Este valor se indica en la gráfica.

2) Si se tiene un triángulo isósceles en el que sus lados iguales miden x cm y su tercer lado mide 6cm.



a) Represente a la h como una función de x. ¿Cuál es su dominio?.
b) Construya la gráfica.
c) Si $x = 8cm$. Obtenga la medida de $h = f(x)$.

Solución.

b) Por el teorema de Pitágoras

$$h^2 + 3^2 = x^2$$
$$h^2 = x^2 - 9$$
$$h = \sqrt{x^2 - 9}$$

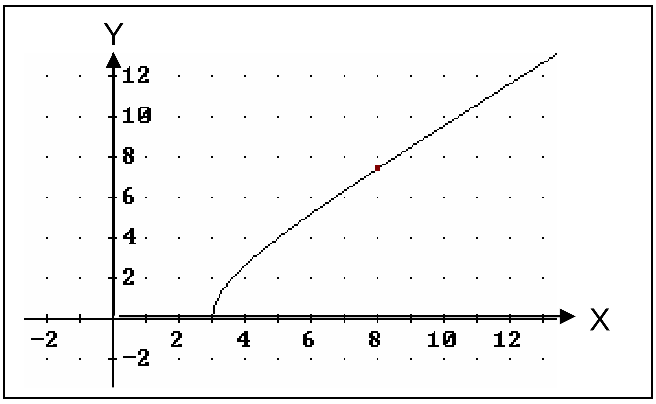
y si $h = f(x)$, entonces la función es:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

al resolver la desigualdad $x^2 - 9 \geq 0$, se obtiene que la solución es: $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

pero como x no puede tomar valores negativos el $D_f = [3, +\infty)$.

b) La gráfica es:



c) $h = f(8) = \sqrt{8^2 - 9} = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{55} = 7.41cm$. Este valor se ilustra en la gráfica.

4.2.4. Funciones racionales.

A continuación se dan las características generales para cada una de estas funciones, se plantean varios ejemplos de funciones racionales en las que se da el dominio, se construye su gráfica y se indica el rango para cada una de ellas y posteriormente se les da solución a algunos problemas sobre aplicaciones.

Las funciones raciones son de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, en las que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales, el dominio para estas funciones es $D_f=\mathbb{R}-\{x|q(x)=0\}$, es decir: son todos los números reales excepto los valores de x para los que la función $q(x)$ es cero. El rango de la función R_f es el intervalo que la gráfica cubre sobre el eje Y,

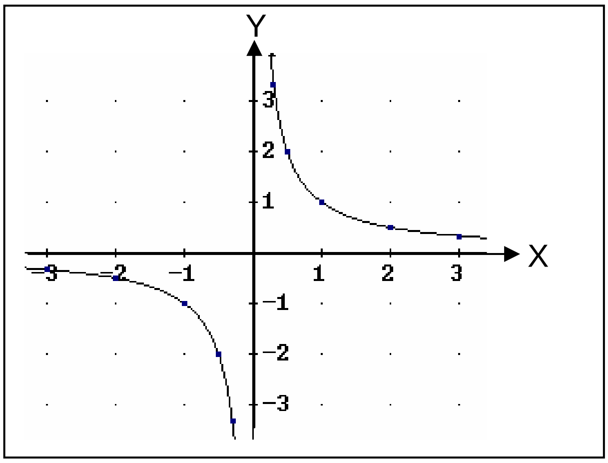
Ejemplos

Para cada una de las funciones que se dan, indique el dominio construya la gráfica y diga cuál es el rango.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

El dominio es: $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ y para la gráfica construimos la tabla siguiente:

x	$f(x)=\dfrac{1}{x}$
-3	-0.33
-2	-0.5
-1	-1
-0.5	-2
-0.3	-3.33
0.3	3.33
0.5	2
1	1
2	0.5
3	0.33

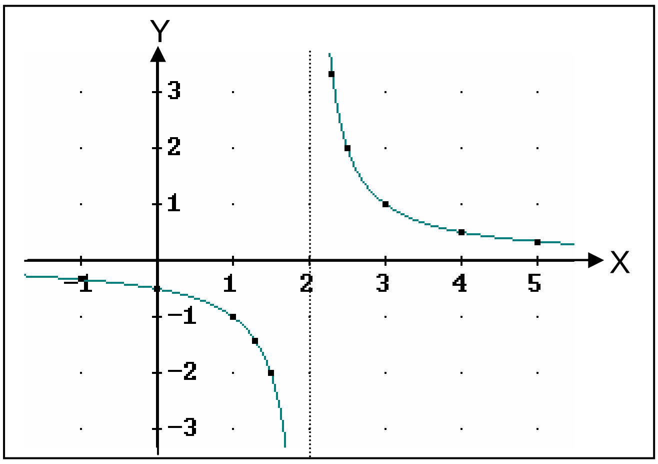


El rango para la función es $R_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbf{R}-\{0\}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

El dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ y para la gráfica construimos la tabla siguiente:

x	$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$
-1	-0.33
-0	-0.5
1	-1
1.3	-2
1.5	-3.33
2.3	3.33
2.5	2
3	1
4	0.5
5	0.33

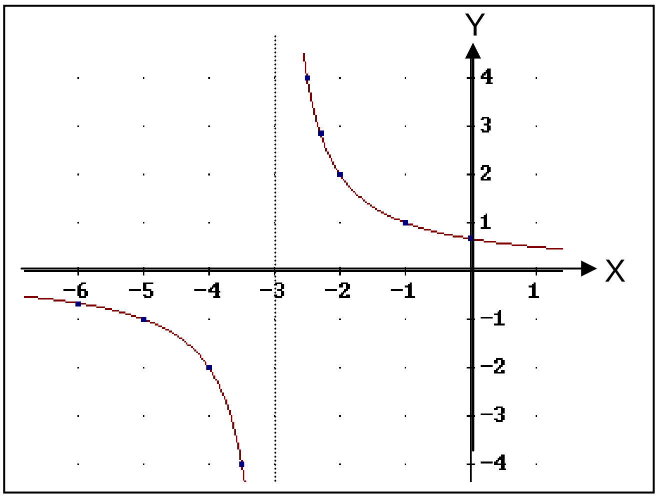


El rango para la función es $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbf{R} - \{0\}$

3) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

El dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ y para la gráfica construimos la tabla siguiente:

x	$f(x)=\dfrac{2}{x+3}$
-6	-0.66
-5	-1
-4	-2
-3.5	-4
-3.3	-6.66
-2.5	4
-2.3	2.85
-2	2
-1	1
0	0.66



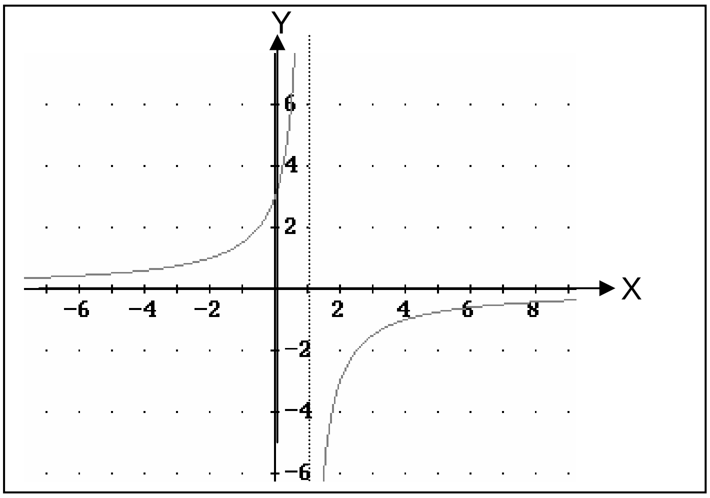
El rango para la función es $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbf{R} - \{0\}$.

Una forma alternativa y que puede resultar más sencilla para trazar la gráfica de este tipo de funciones es considerar las asíntotas, siendo éstas, rectas horizontales y verticales y que además cumplen con la propiedad de que las gráficas son curvas que se aproximan cada vez más a las asíntotas. Para el primer ejemplo la asíntota vertical es la recta que pasa por el cero, para el segundo es la recta que pasa por el 2 y para el tercer ejemplo es la recta que pasa por –3. Considerando estos ejemplos observemos que las asíntotas verticales son las rectas que pasan por el valor que se elimina en el dominio para cada función. Para los tres ejemplos, la asíntota horizontal coincide con el eje X, dado que estas asíntotas son las rectas que pasan por el cociente formado por los coeficientes de la variable x elevada al mayor exponente, tanto en el numerador como en el denominador (posteriormente se dirá que la asíntota horizontal pasa por el límite de la función cuando x tiende a infinito).

En los ejemplos que se trabajan a continuación, se consideran las asíntotas para trazar la gráfica en cada caso.

4) $f(x)=\dfrac{3}{1-x}$

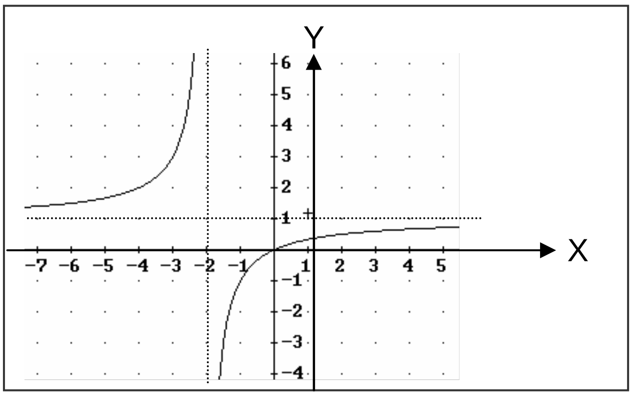
El dominio es: $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$. Luego la asíntota vertical pasa por el 1 y la asíntota horizontal pasa por el cero; es decir, coincide con el eje X, ya que el cociente formado por los coeficientes de la x elevada al máximo exponente es $\dfrac{0}{1}=0$, porque como en el numerador no aparece la x, esto significa que su coeficiente es cero. Ahora para trazar la gráfica, en primer lugar podemos analizar como es la gráfica en el intervalo $(1,+\infty)$ y para saber si en dicho intervalo la gráfica está en la parte inferior o en la parte superior de la asíntota horizontal, se evalúa la función en cualquier valor de x que esté en el intervalo $(1,+\infty)$. Si $x=2$ entonces $f(2)=\dfrac{3}{1-2}=\dfrac{3}{-1}=-3<0$, esto significa que la gráfica está en la parte inferior del eje X. De la misma forma para ver si en el intervalo $(-\infty,1)$, la gráfica está en la parte inferior o en la parte superior de la asíntota horizontal se evalúa la función en el intervalo citado. Para $x=0$, $f(0)=\dfrac{3}{1-0}=\dfrac{3}{1}=3>0$, esto significa que la gráfica está en la parte superior del eje X. Luego, la gráfica es:



El rango para la función es nuevamente $R_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbf{R}-\{0\}$.

5) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

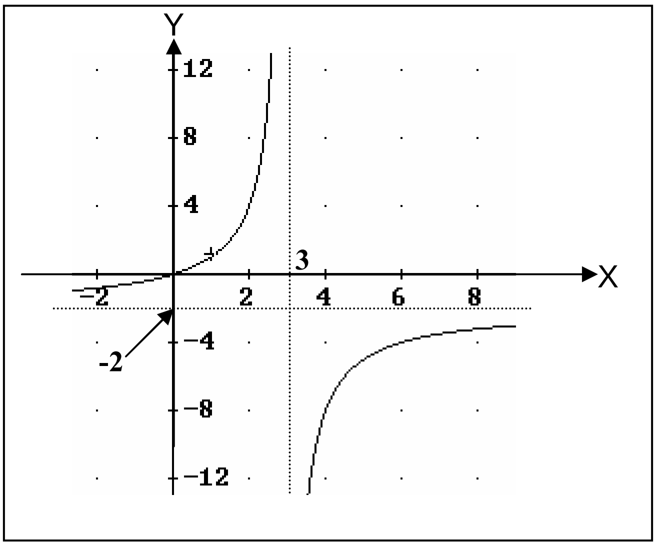
$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Luego la asíntota vertical pasa por el –2 y la asíntota horizontal pasa por el 1. Al usar un procedimiento como en el ejemplo anterior, se obtiene que la gráfica es:



$R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

6) $f(x) = \dfrac{2x}{3-x}$

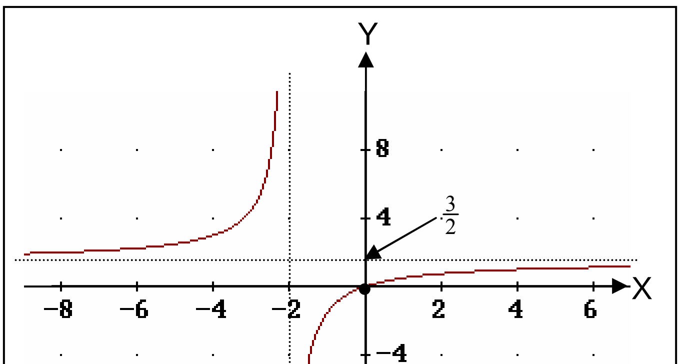
$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$. Luego la asíntota vertical pasa por el 3 y la asíntota horizontal pasa por el -2. La gráfica y el rango son:



$$R_f = (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$$
$$= \mathbf{R} - \{-2\}.$$

7) $f(x) = \dfrac{3x}{2x+4}$

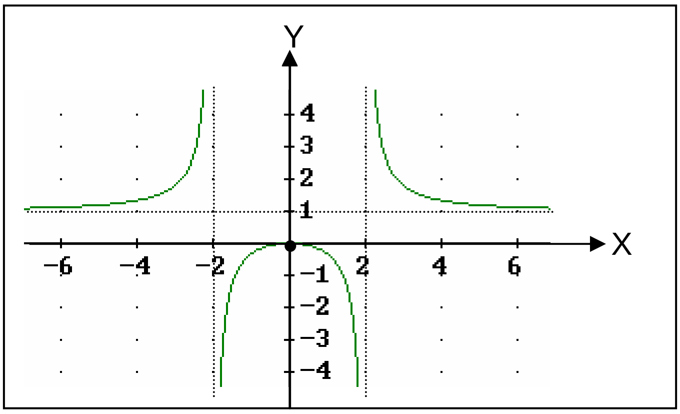
$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Luego la asíntota vertical pasa por -2 y la asíntota horizontal pasa por $\frac{3}{2}$. La gráfica y el rango son:



$$R_f = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$
$$= \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

8) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

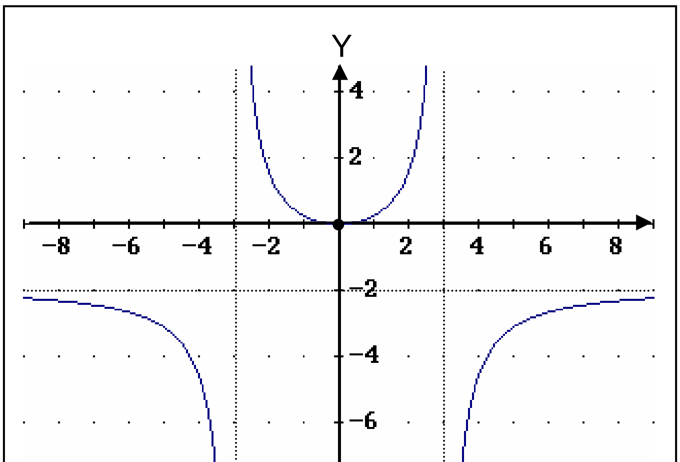
$D_f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$. Luego las asíntotas verticales pasan por -2 y por le 2, la asíntota horizontal pasa por el 1, ya que los coeficientes de las x^2 son 1 tanto en el numerador como en el denominador, es decir: $\frac{1}{1}=1$. La gráfica y el rango son



$$\begin{aligned} R_f &=(-\infty,0]\cup(1,+\infty) \\ &=\mathbf{R}-(0,1]. \end{aligned}$$

9) $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$

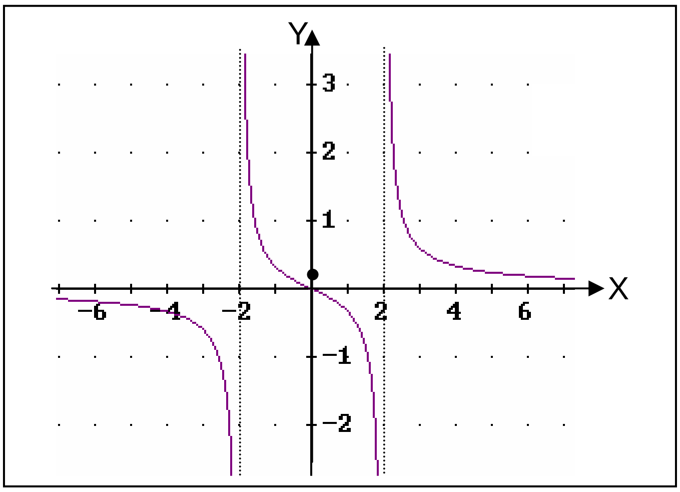
$D_f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$. Luego las asíntotas verticales pasan por -3 y por le 3, la asíntota horizontal pasa por el -2, ya que los coeficientes de las x^2 son 2 en el numerador y -1 en el denominador, es decir: $\frac{2}{-1}=-2$.



$$\begin{aligned} R_f &=(-\infty,-2)\cup[0,+\infty) \\ &=\mathbf{R}-[-2,0). \end{aligned}$$

10) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$. Luego las asíntotas verticales pasan por -2 y por el 2, la asíntota horizontal pasa por el 0; es decir coincide con el eje X, ya que la x elevada al máximo exponente es x^2 y como en el numerador no aparece esto significa que su coeficiente es cero y en el denominador el coeficiente es 1, es decir: $\dfrac{0}{1}=0$.



$R_f=\mathbf{R}$.

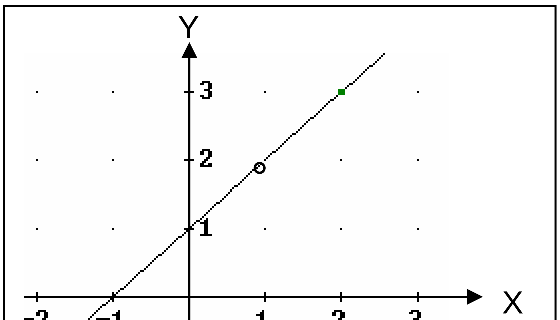
11) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$. Observemos que la asíntota horizontal no está definida, dado que al considerar el cociente formado por los coeficientes de la x^2, se tiene que $\dfrac{1}{0}$ y esta expresión no está definida. Por tal motivo, en este tipo de funciones es conveniente simplificar lo que más sea posible:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

para graficar esta función a la x se le puede asignar cualquier número real excepto el uno, además como se trata de una función lineal, la gráfica es una línea recta y para graficar líneas rectas es suficiente con dos puntos.

	x	$f(x)=x+1$
♣	1	2



El símbolo ♣ significa que el punto indicado no se considera al graficarlo y por lo tanto se representa con una ruedita hueca.

2	3

12) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}$

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$. Esta función es del tipo de la anterior, por tal motivo se simplifica:

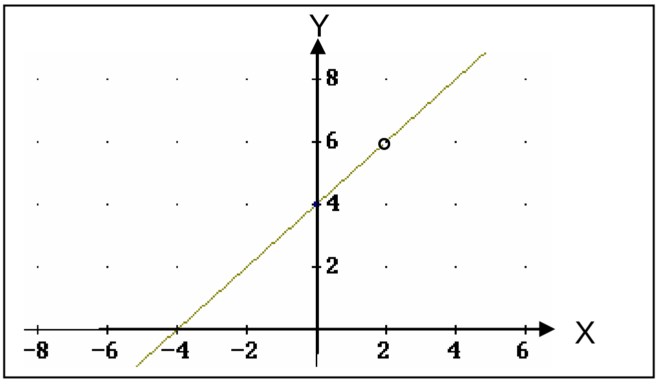
$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}=x+4$$

para graficar esta función a la x se le puede asignar cualquier número real excepto el dos, además como se trata de una función lineal, la gráfica es una línea recta y para graficar líneas rectas es suficiente con dos puntos.

	x	$f(x)=x+4$
♣	2	6
	0	4

Como el punto (2,4) no se considera, se representa con una ruedita hueco.

El $R_f=\mathbf{R}-\{6\}$



13) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{2+x}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$. Se simplifica la función:

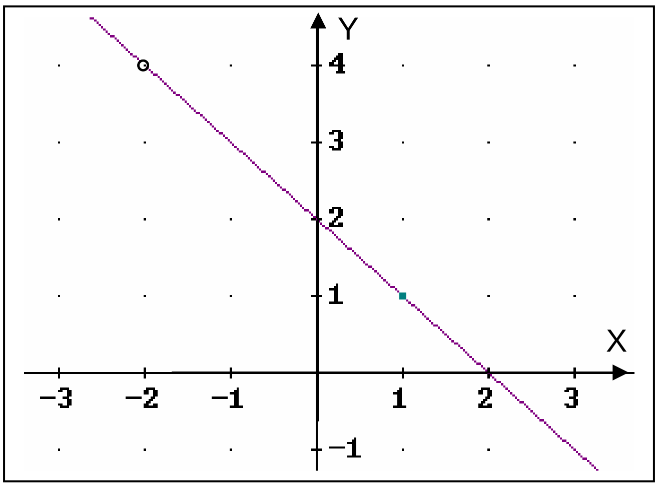
$$f(x)=\frac{4-x^2}{2+x}=\frac{(2-x)(2+x)}{2+x}=2-x$$

para graficar esta función a la x se le puede asignar cualquier número real excepto el menos dos.

	x	$f(x)=2-x$
♣	-2	4
	1	1

Como el punto (-2,4) no se considera, se representa con una ruedita hueco.

El $R_f=\mathbf{R}-\{4\}$



14) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{(x-1)(x+1)}$

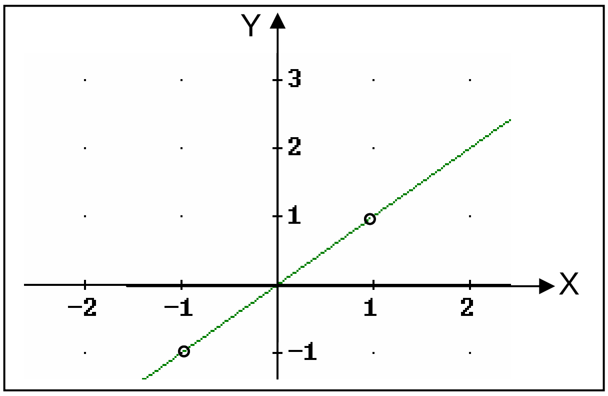
$D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Se simplifica la función:

$$f(x)=\frac{x^3-x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=x$$

para graficar esta función a la x se le asignan los dos valores cuyos puntos no se consideran sobre la línea recta.

	x	$f(x)=x$
♣	-1	-1
	1	1

El $R_f=\mathbf{R}-\{-1,1\}$



4.2.4.1. Aplicaciones de las funciones racionales.

En cada uno de los problemas que se dan, de la respuesta a las preguntas planteadas.

1. La ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo.
   a) De una función que modele la ley de Boyle.
   b) Construya la gráfica considerando que $k=1$.
   c) Que ocurre cuando el volumen aumenta.

   Solución.

   a) Supongamos que p represente a la presión del gas y que v representa el volumen, ahora si recordamos la variación inversa, obtenemos que:

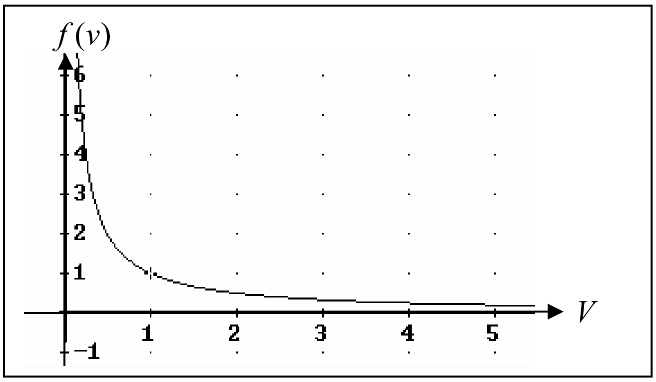
$$p=\frac{k}{v}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. A continuación con el fin de manejar la notación de funciones, establecemos las siguientes equivalencias. Supongamos que $f(v)$ representa la presión del gas y que v representa el volumen, luego la función es:

$$f(v)=\frac{k}{v}$$

como el volumen no puede ser cero ni negativo, entonces el $D_f = (0, +\infty)$

b) La gráfica de la función es:



c) En la gráfica observamos que cuando el volumen aumenta la presión del gas disminuye.

2. El número de días que se necesitan para completar un trabajo varía inversamente con el número de hombres que trabajan en él, si lo hacen con igual rapidez.
   a) De una función que modele este problema.
   b) Construya la gráfica considerando que $k = 2$.
   c) Que ocurre cuando el número de hombres aumenta y que sucede cuando el número de hombres disminuye.

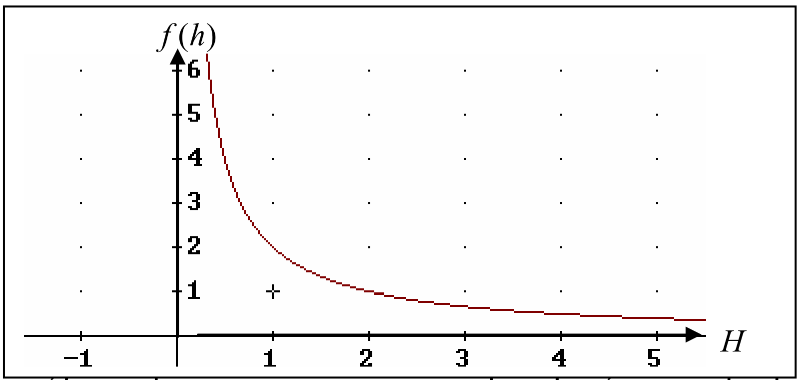
Solución.

a) Supongamos que $f(h)$ represente el número de días para completar un trabajo y que h representa el número de hombres, entonces:

$$f(h) = \frac{k}{h}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Como el número de hombres no puede ser cero ni negativo, entonces el $D_f = (0, +\infty)$

b) La gráfica de la función es:



c) En la gráfica observamos que cuando el número de hombres aumenta el número de días para completar el trabajo disminuye y que cuando el número de hombres disminuye el número de días aumenta.

3. La base de un triángulo de área constante varía inversamente con su altura.
   a) De una función que modele esta situación.
   b) Construya la gráfica considerando que $k=3$.

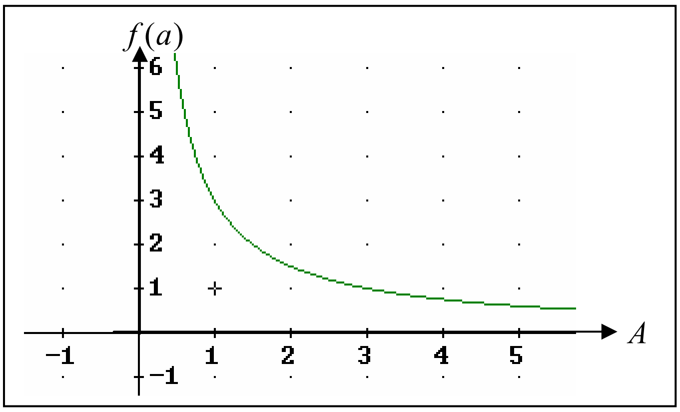
Solución.

a) Supongamos que $f(a)$ represente la base del triángulo y que a representa la altura, entonces:

$$f(a)=\frac{k}{a}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Como la altura no puede ser cero ni negativa, entonces el $D_f=(0,+\infty)$

b) La gráfica de la función es:



4.3. Ejercicios sobre funciones

I) Para cada una de las funciones que se dan: indique el dominio, construya la gráfica y diga cuál es el rango.

1. $f(x)=-5$	2. $f(x)=4$
3. $f(x)=2x$	4. $f(x)=2x-1$
5. $f(x)=2x-2$	6. $f(x)=2x-3$
7. $f(x)=-3x$	8. $f(x)=-3x+1$
9. $f(x)=-3x+2$	10. $f(x)=-3x+3$
11. $f(x)=x^2+6$	12. $f(x)=x^2-7$
13. $f(x)=-x^2+5$	14. $f(x)=-x^2-8$

15. $f(x)=(x+4)^2+7$

16. $f(x)=(x-5)^2-3$

17. $f(x)=-(x+1)^2+6$

18. $f(x)=-(x-4)^2-3$

19. $f(x)=2x^2$

20. $f(x)=2x^2+2$

21. $f(x)=3x^2$

22. $f(x)=3x^2-3$

23. $f(x)=x^3+5$

24. $f(x)=x^3-5$

25. $f(x)=(2x+3)^3+1$

26. $f(x)=(2x-6)^3-1$

27. $f(x)=-(3x+7)^3+3$

28. $f(x)=-(3x-8)^3-4$

29. $f(x)=|2x+3|$

30. $f(x)=|2x-3|$

31. $f(x)=|3x+6|+3$

32. $f(x)=|3x-6|-3$

33. $f(x)=-|3x-9|+4$

34. $f(x)=-|2x-7|-6$

35. $f(x)=\sqrt{2x+1}$

36. $f(x)=\sqrt{2x-1}$

37. $f(x)=\sqrt{4x+3}$

38. $f(x)=\sqrt{3-x}$

39. $f(x)=\sqrt{5-2x}$

40. $f(x)=\sqrt{6-3x}$

41. $f(x)=\sqrt{4+5x}$

42. $f(x)=\sqrt{12-4x}$

43. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

44. $f(x)=\sqrt{x^2-5x}$

45. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

46. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$

47. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

48. $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

49. $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$

50. $f(x)=\dfrac{4}{3x-4}$

51. $f(x)=\dfrac{1}{2x+2}$

52. $f(x)=\dfrac{2}{x-2}$

53. $f(x)=\dfrac{5}{1-x}$

54. $f(x)=\dfrac{6}{1-2x}$

55. $f(x)=\dfrac{2}{3-2x}$

56. $f(x)=\dfrac{7}{5-x}$

57. $f(x)=\dfrac{4x}{x+2}$

58. $f(x)=\dfrac{x}{3-x}$

59. $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$

60. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-1}$

61. $f(x)=\dfrac{3x^2}{1-x^2}$

62. $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-9}$

63. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-16}$

64. $f(x)=\dfrac{5x}{9-x^2}$

65. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

66. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$

67. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$

68. $f(x)=\dfrac{9-x^2}{3-x}$

69. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$

70. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

71. $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)(x+3)}{x^2-1}$

72. $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)(x+4)}{x^2-4}$

73. $f(x)=\begin{cases}-2 & si \quad x\le 3\\ 2 & si \quad x>3\end{cases}$

74. $f(x)=\begin{cases}x-1 & si \quad x\le 2\\ 2-2x & si \quad x>2\end{cases}$

75. $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & si \quad x<3\\ 2x-1 & si \quad x\ge 3\end{cases}$

76. $f(x)=\begin{cases}1-3x & si \quad x\le 0\\ 3x^2+5 & si \quad x>0\end{cases}$

II) De la respuesta a lo que se pide en cada problema.

1) El volumen de un gas a temperatura constante varía inversamente con su presión.
   a) Represente el volumen en función de la presión e indique el dominio.
   b) Construya la gráfica.

2) La presión es inversamente proporcional a la altura.
   a) Represente la presión en función de la altura e indique el dominio.

b) Construya la gráfica.

3) La temperatura a la que hierve el agua varía inversamente con el número de metros sobre el nivel del mar.
   a) Represente la temperatura en función del número de metros sobre el nivel del mar e indique el dominio.
   b) Construya la gráfica.

4) El monto de capital necesario para producir un ingreso dado varía inversamente con al tasa de interés.
   a) Represente el monto del capital en función de la tasa de interés e indique el dominio.
   b) Construya la gráfica.

5) La fuerza necesaria para levantar una roca varía inversamente con la longitud de la palanca usada.
   a) Represente la fuerza en función de la longitud de la palanca e indique el dominio.
   b) Construya la gráfica.

6) La iluminación de un objeto varía inversamente con el cuadrado de la distancia de la fuente luminosa al objeto.
   a) Represente la iluminación en función de la distancia de la fuente de luminosidad e indique el dominio.
   b) Construya la gráfica.

7) El volumen de un gas varía directamente con la temperatura e inversamente con la presión. Represente el volumen en función de la temperatura y de la presión.

8) La resistencia eléctrica de un cable varía directamente con su longitud e inversamente con el cuadrado de su diámetro. Represente la resistencia en función de la longitud y del diámetro.

9) La ley de gravitación de Newton dice que dos objetos con masas m_1 y m_2 se atraen entre si con una fuerza que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los objetos. Represente la fuerza en función de la masa y de la distancia.

10) La población de conejos de una granja se comporta de acuerdo a la fórmula

$$f(t) = \frac{30000t}{t+1}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde el principio del año.
   a) Trace la gráfica de la población de conejos.
   b) ¿Qué pasa finalmente con la población de conejos?

11) Después de inyectar cierto medicamento a un paciente, se supervisa la concentración f de una droga en la sangre. En el momento $t \geq 0$ (en minutos desde el momento de la inyección), la concentración (en mg/l) está dada por la función

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}$$

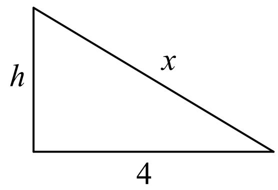
a) Trace la gráfica de la concentración de la medicina
b) ¿Qué ocurre finalmente con la concentración de la medicina en la sangre?

12) A un paciente se le administra una medicina y se monitorea la concentración de la misma en la corriente sanguínea. En el momento $t \geq 0$ (en horas desde la administración de la droga), la concentración (mg/l) está dada por la fórmula

$$f(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

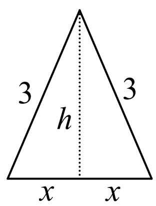
a) Trace la gráfica de la función.
b) ¿Cuál es la concentración de la medicina más elevada alcanzada en la corriente sanguínea del paciente?
c) ¿Qué le ocurre a la concentración de la medicina después de un largo periodo?

13) Dado el triángulo rectángulo



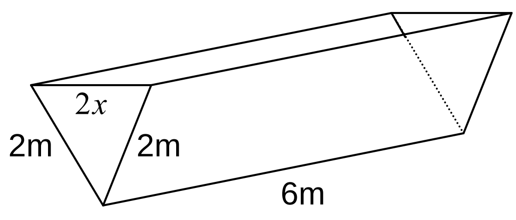
a) Exprese el área en función de la x. ¿Cuál es el dominio?
b) Trace la gráfica.
c) ¿Cuál es el área cuando $x = 6$.

14) Dado el triángulo isósceles



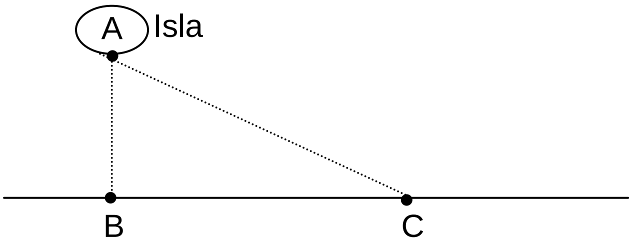
a) Exprese el área en términos de la x. ¿Cuál es el dominio?
b) Trace la gráfica.
c) ¿Cuál será el área máxima? (Use la gráfica).

15) Un abrevadero tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles. La anchura de su parte superior mide $2x$, los lados iguales miden 2 metros y el largo mide 6 metros.



a) Exprese el volumen en términos de la x. ¿Cuál es el dominio e la función que se obtiene?.
b) Construya la gráfica.
c) Obtenga el volumen cuando $x = 1m$.

16) Una isla (representada por A) se encuentra a 5km de la playa y la distancia del punto B al punto C (como se indica en la figura) es x. Si una persona en una lancha rema a 3km por hora.



a) Exprese el volumen en términos de la x. ¿Cuál es el dominio e la función que se obtiene?.
b) Construya la gráfica.
c) Obtenga el volumen cuando $x = 1m$.

4.4. Operaciones con funciones

4.4.1. Suma, resta, producto y cociente de funciones

Definición. Si se tienen las funciones f y g, entonces:

$$a)\quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$b)\quad (f-g)(x) = f(x)-g(x)$$
$$c)\quad (f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$$
$$d)\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g \quad y \quad D_{f/g} = D_f \cap D - \{x | g(x) = 0\}$

Es decir el dominio del cociente es la intersección del dominio de f con el dominio de g menos el valor de x o valores x para los cuales $g(x)$ se iguale con cero.

Ejemplos.

1) Si $f(x) = 2x - 8$ y $g(x) = x^2 - 1$. Obtenga:
a) $f+g$, b) $f-g$, c) $f \cdot g$, d) f/g y sus dominios correspondientes.

Solución:

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x-8+x^2-1=x^2+2x-9$

b) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=2x-8-x^2+1=-x^2+2x-7$

$c)\ (f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=(2x-8)\left(x^2-1\right)=2x^3-2x-8x^2+8$

$=2x^3-8x^2-2x+8$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-8}{x^2-1}$

El $D_f=D_g=\mathbb{R}$, luego el $D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

Y el $D_{f/g}=D_f\cap D-\left\{x\middle|g(x)=0\right\}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

2) Si $f(x)=x^2+x-1$ y $g(x)=2-3x^2$. Obtenga:

a) $f+g$, b) $f-g$, c) $f\cdot g$, d) f/g y sus dominios correspondientes.

Solución:

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+x-1+2-3x^2=-2x^2+x+1$

b) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2+x-1-2+3x^2=4x^2+x-3$

$c)\ (f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\left(x^2+x-1\right)\left(2-3x^2\right)=2x^2-3x^4+2x-3x^3-2+3x^2$

$=-3x^4-3x^3+5x^2+2x-2$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+x-1}{2-3x^2}$

El $D_f=D_g=\mathbb{R}$, luego el $D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

Y el $D_{f/g}=D_f\cap D-\left\{x\middle|g(x)=0\right\}=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right\}$.

3) Si $f(x)=\sqrt{2x-1}$ y $g(x)=\sqrt{x+4}$. Obtenga:

a) $f+g$, b) $f-g$, c) $f\cdot g$, d) f/g y sus dominios correspondientes.

Solución:

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}$

b) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}$

$c)\ (f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\left(\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{x+4}\right)=\sqrt{(2x-1)(x+4)}$

$=\sqrt{2x^2+8x-x-4}=\sqrt{2x^2+7x-4}$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+4}}=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+4}}$

El $D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y $D_g = \left[-4, +\infty\right)$.

Luego el $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap \left[-4, +\infty\right) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Y el $D_{f/g} = D_f \cap D - \left\{ x \middle| g(x) = 0 \right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) - \{-4\}$.

4) Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$. Obtenga:

a) $f+g$, b) $f-g$, c) $f \cdot g$, d) f/g y sus dominios correspondientes.

Solución:

$$a)\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2+x(x-1)}{x(x+2)}$$

$$= \frac{x+2+x^2-x}{x(x+2)} = \frac{x^2+2}{x(x+2)}$$

$$b)\ (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-x(x-1)}{x(x+2)}$$

$$= \frac{x+2-x^2+x}{x(x+2)} = \frac{-x^2+2x+2}{x(x+2)}$$

$$c)\ (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{x-1}{x(x+2)}$$

d) $$d)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{x+2}{x(x-1)}$$

El $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ y $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Luego el $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = \left(\mathbb{R} - \{0\}\right) \cap \left(\mathbb{R} - \{-2\}\right) = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

Y el $D_{f/g} = D_f \cap D - \left\{ x \middle| g(x) = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{-2, 0\} - \{1\} = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$.

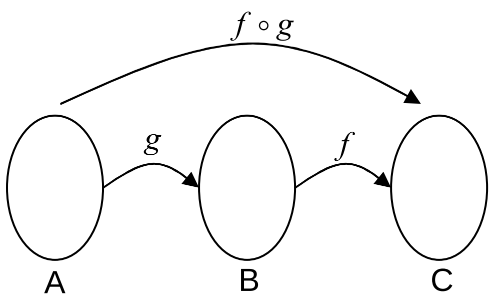
4.4.2. Composición de funciones

Definición. Si f y g son dos funciones, entonces la composición de f con g se denota por: $f \circ g$ y se define como:

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

Además el dominio es: $D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \middle| g(x) \in D_f \right\}$.

Una descripción geométrica de $f \circ g$ es la siguiente:



Ejemplos.

1) Si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=2x-3$. Obtenga:
a) $f\circ g$, b) $g\circ f$, c) $f\circ f$, d) $g\circ g$ y sus dominios correspondientes.

Solución:

a) $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f(2x-3)=\sqrt{2x-3}$

b) $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\sqrt{x}\right)=2\sqrt{x}-3$

$c)$ $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$

$d)$ $(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=g(2x-3)=2(2x-3)-3=4x-9$

El $D_f=[0,+\infty)$ y $D_g=\mathbb{R}$.

Luego el $D_{f\circ g}=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$, $D_{g\circ f}=[0,+\infty)=D_{f\circ f}$ y $D_{g\circ g}=\mathbb{R}$.

2) Si $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=3x+5$. Obtenga:
a) $f\circ g$, b) $g\circ f$, c) $f\circ f$, d) $g\circ g$ y sus dominios correspondientes.

Solución:

$a)$ $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f(3x+5)=(3x+5)^2-1=9x^2+30x+25-1$
$=9x^2+30x+24$

$b)$ $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(x^2-1\right)=3\left(x^2-1\right)+5=3x^2-3+5$
$=3x^2+2$

$c)$ $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)^2-1=x^4-2x^2+1-1$
$=x^4-2x^2$

$d)$ $(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=g(3x+5)=3(3x+5)+5=9x+15+5$
$=9x+20$

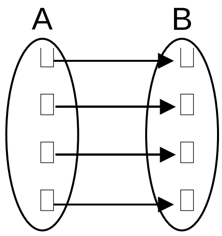
El $D_f=\mathbb{R}$ y $D_g=\mathbb{R}$.

Luego el $D_{f\circ g}=D_{g\circ f}=D_{f\circ f}=D_{g\circ g}=\mathbb{R}$.

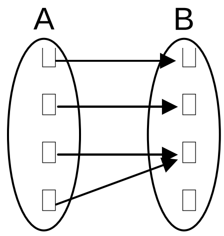
4.5. Función inversa

Este concepto, surge de la necesidad de construir funciones que inviertan una correspondencia entre dos conjuntos. Ahora bien, para poder manejar esta idea, se requiere saber cuando una función es uno a uno o inyectiva.

Definición. Dada una función $f(x)$ que va del conjunto A hacia el conjunto B. Se dice que es uno a uno o inyectiva si se cumple que cuando $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. En caso contrario se dirá que la función $f(x)$ no es uno a uno.



Uno a uno



No es uno a uno

En las figuras anteriores se ilustra cuando una función es uno a uno y cuando no lo es.

Ejemplos

Verifique si las funciones que se plantean son inyectivas o no.

1) $f(x) = 2x - 1$

Si $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 - 1 \neq 2x_2 - 1 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$.

Luego la función es inyectiva.

2) $f(x) = x^2 + 5$

Si $-2 \neq 2 \quad \Rightarrow \quad (-2)^2 + 5 = (2)^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$.

Luego la función no es inyectiva.

3) $f(x) = 7x^3 + 2$

Si $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad 7(x_1)^3 + 2 \neq 7(x_2)^3 + 2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$.

Luego la función si es inyectiva.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

Si $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x_1 + 3} \neq \dfrac{1}{x_2 + 3} \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$.

Luego la función es inyectiva.

5) $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-5}$

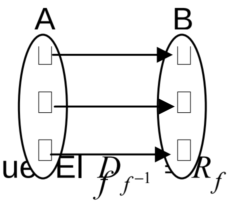
Si $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2x_1 + 3}{3x_1 - 5} \neq \dfrac{2x_2 + 3}{3x_2 - 5} \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$.

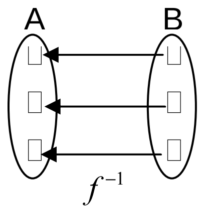
Luego la función es inyectiva.

Definición de función inversa.

Si f es una función inyectiva que va del conjunto A, hacia el conjunto B, con D_f y R_f, la inversa f^{-1} es una función que asocia a cada elemento del rango de f $\left(R_f\right)$ uno y sólo un elemento del dominio de f $\left(D_f\right)$.

Un esquema ilustrativo es el siguiente:





Observemos que El $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$.

Consecuencias de la función inversa:

- Si f es uno a uno entonces f^{-1} existe.
- $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$.

Procedimiento para obtener la inversa de una función uno a uno o inyectiva $f(x)$.

- Se intercambian las dos variables x y y.
- Se despeja la variable y. La expresión resultante es la función inversa**.**

Ejemplos

Obtenga la inversa de las funciones inyectivas dadas anteriormente (en donde $y = f(x)$).

1) $f(x) = 2x - 1$

Si $x = 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 2y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x+1}{2} = y$.

Luego la función inversa es: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

2) $f(x) = 7x^3 + 2$

$x = 7y^3 + 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 7y^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{7} = y^3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{7}} = y$.

Luego la función inversa es: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{7}}$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

$$x=\frac{1}{y+3} \quad \Rightarrow \quad x(y+3)=1 \quad \Rightarrow \quad xy+3x=1 \quad \Rightarrow \quad xy=1-3x \quad \Rightarrow$$

$$y=\frac{1-3x}{x}$$

.

Luego la función inversa es: $f^{-1}(x)=\dfrac{1-3x}{x}$.

.

4) $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x-5}$

$$x=\frac{2y+3}{3y-5} \quad \Rightarrow \quad x(3y-5)=2y+3 \quad \Rightarrow \quad 3xy-5x-2y=3 \quad \Rightarrow$$

$$y(3x-2)=3+5x \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3+5x}{3x-2}$$

.

Luego la función inversa es: $f^{-1}(x)=\dfrac{3+5x}{3x-2}$.

.

Ejercicios

I) Realice los operaciones: f+g, f-g, f.g, f/g y obtenga sus dominios correspondientes para cada pareja de funciones que se dan:

1. $f(x)=3x-1$ $\quad y \quad$ $g(x)=2-x$
2. $f(x)=x^2+2$ $\quad y \quad$ $g(x)=1-x^2$
3. $f(x)=x^3+1$ $\quad y \quad$ $g(x)=2-x^3$
4. $f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad y \quad$ $g(x)=\sqrt{3x-2}$
5. $f(x)=\sqrt{4-x}$ $\quad y \quad$ $g(x)=\sqrt{5-7x}$
6. $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ $\quad y \quad$ $g(x)=\dfrac{1}{2x+3}$
7. $f(x)=\dfrac{5}{1-x}$ $\quad y \quad$ $g(x)=\dfrac{1}{4-x}$
8. $f(x)=\dfrac{x}{2x+3}$ $\quad y \quad$ $g(x)=\dfrac{3x}{2x-5}$
9. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad y \quad$ $g(x)=\dfrac{1-2x}{3-4x}$

II) Para cada pareja de funciones del ejercicio I. Obtenga:
a) $f\circ g$, b) $g\circ f$, c) $f\circ f$ y d) $g\circ g$

III) Determine si las funciones tienen inversa, en caso afirmativo obtenerla.

1) $f(x)=3x+5$ 2) $f(x)=10-2x$

3) $f(x)=\dfrac{x}{2}+4$ 4) $f(x)=x^2-5$

5) $f(x)=\dfrac{2}{x+4}$ 6) $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$

7) $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+3}$ 8) $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$

4.6. Funciones Trascendentes

Dentro de las funciones trascendentes se encuentran las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, siendo éstas las que se trabajaran a continuación.

4.6.1. Funciones Exponenciales

En las matemáticas aplicadas las funciones exponenciales desempeñan un papel muy importante. Son utilizadas en demografía para pronosticar el tamaño de la población, en finanzas para obtener el valor de las inversiones, en arqueología para conocer la edad de los objetos antiguos, en psicología para estudiar una epidemia, en la industria para estimar la confiabilidad de productos, etc.

En general cualquier función de la forma:

$$f(x)=a^x$$

representa una función exponencial, en donde $a>0$ y $a\neq 1$.

A continuación se dan ejemplos particulares de funciones para las cuales, se da el dominio, se construye su gráfica y se indica el rango.

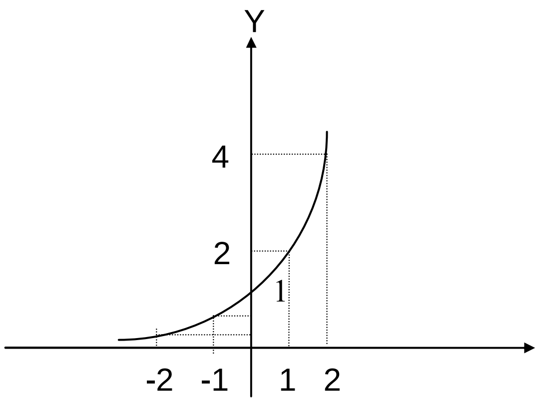
Ejemplos

Para cada una de las funciones indique, construya la gráfica y diga cuál es el rango.

1) $f(x)=2^x$

Como la x puede tomar cualquier valor, el dominio de la función es $D_f=\mathbb{R}$ y para construir la gráfica de la función, trabajamos con la tabla siguiente:

x	$f(x)=2^x$	Puntos
-2	$f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$	$\left(-2,\frac{1}{4}\right)$
-1	$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$	$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$
0	$f(0)=2^0=1$	$(0,1)$
1	$f(1)=2^1=2$	$(1,2)$

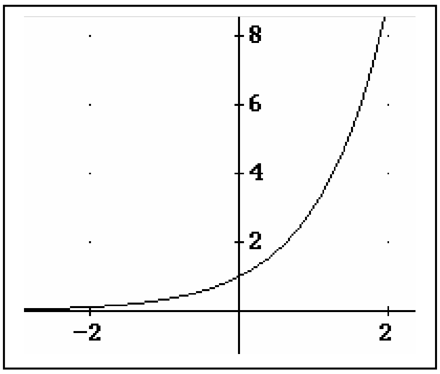


2	$f(2)=2^2=4$	$(2,4)$

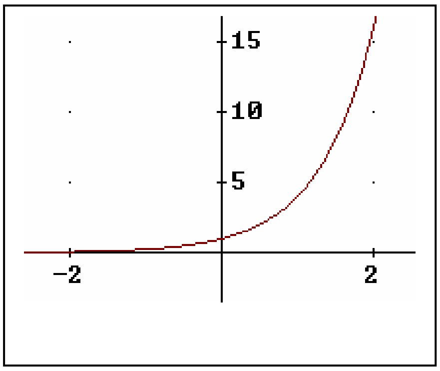
El rango de la función es $R_f = (0,+\infty)$.

Para el ejemplo 2 y el 3, el dominio para cada función son los reales y el rango es el intervalo (0, +∞).

2) $f(x)=3^x$.



3) $f(x)=4^x$



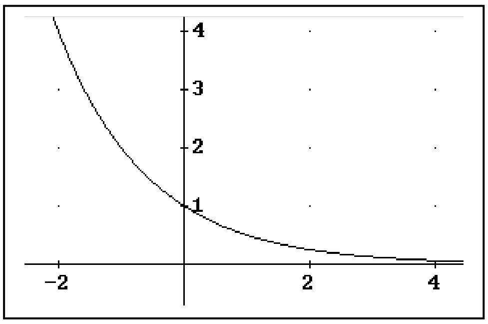
En estos tres ejemplos a>1, observa la gráfica de cada uno de ellos y da la conclusión correspondiente.

Ahora se darán ejemplos en donde a toma valores entre 0 y 1 ; es decir : 0<a<1.

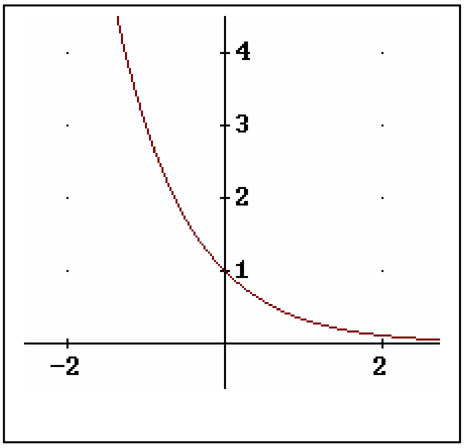
4) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

El dominio es $D_f = \mathbb{R}$

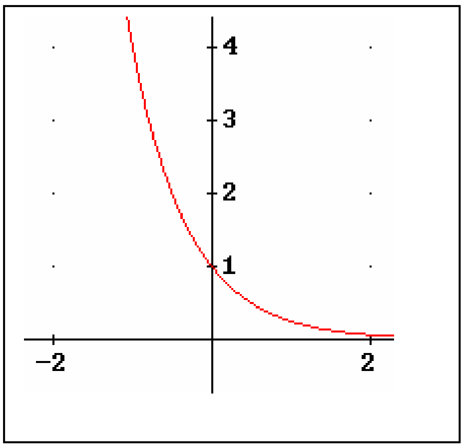
y el $R_f = (0,+\infty)$.



5) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.



6) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.



Al observar las gráficas de los ejemplos 4, 5 y 6, que conclusión se pueden obtener.
Ahora con el fin de llegar a un tipo de función exponencial muy usada en las matemáticas, ya que interviene en varios modelos que incluyen lo que se conoce como incremento exponencial o bien decremento exponencial (como se verá posteriormente), Si se considera la función exponencial

$$f(x) = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{xk}$$

Matemáticamente se demuestra que si k es grande, se tiene que**:**

$$\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{xk} \approx e^{ix}$$

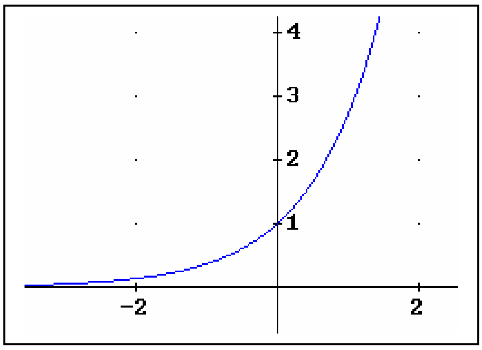
en donde e$\approx$ 2.7182 es considerado la base del logaritmo natural. De lo anterior se deduce que:

$$f(x) = c\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{xk} \approx ce^{ix}$$

es decir: $f(x) \approx c$ e^{ix} cuando k es grande.

La función $f(x) = e^x$ y sus aplicaciones como modelo de distintas situaciones.

Para esta función el $D_f = \mathbb{R}$ y el $R_f = (0, +\infty)$. Su gráfica es la siguiente:



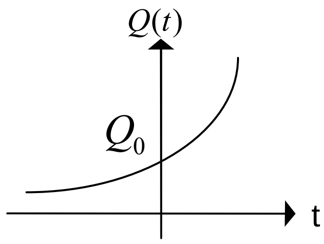
Crecimiento Exponencial

El modelo matemático que representa el crecimiento exponencial, está dado de la forma siguiente:

$Q(t)$ crece exponencialmente si $Q(t) = Q_0 e^{kt}$

cuando $k > 0$ y Q_0 es el valor inicial $Q(0)$.

Al considerar las gráficas vistas anteriormente, nos damos cuenta que la gráfica de la función $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ es de la forma:



Ahora se trabajarán algunos problemas en los que la función $f(x) = e^x$**,** se aplique como modelo de crecimiento exponencial, decrecimiento exponencial, interés compuesto continuo, etc.

Problema 1.

En estudios realizados por los biólogos, han obtenido que el número de bacterias en un cultivo crece exponencialmente. Si se supone que al inicio hay 3000 bacterias en un cultivo y que 13 minutos después hay 9000. ¿Cuántas bacterias habrá al término de una hora?.

Solución:
$Q(t)$ es el número de bacterias existentes después de t minutos.
3000 es el número de bacterias en un inicio.
9000 es el número de bacterias después de 30 minutos. Entonces:

$$9000 = 3000 e^{30k}$$

$$\frac{9000}{3000} = e^{30k}$$

$$3 = e^{30k}$$

luego para obtener el número de bacterias después de una hora

$$Q(60) = 3000 e^{60k} = 3000\left(e^{30k}\right)^2 = 3000(3)^2 = 3000(9) = 27000$$

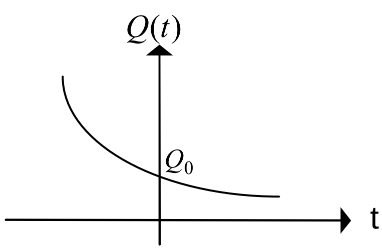
por lo tanto, al término de una hora habrá 27000 bacterias.

Decrecimiento Exponencial

$Q(t)$ crece exponencialmente si $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$

cuando $k > 0$ y Q_0 es el valor inicial $Q(0)$.

En experimentos realizados se sabe que las sustancias radiactivas se desintegran exponencialmente, de igual forma las ventas de los productos decrecen exponencialmente cuando se descontinúa la publicidad y de hecho las cantidades que decrecen exponencialmente se caracterizan por que su ritmo de crecimiento es proporcional a su tamaño. La gráfica de la función $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ es la siguiente:



Problema 2.

Si en la industria se utiliza una máquina que se desprecia de tal forma que después de t está dada por una función de la forma $Q(t) = Q_0 e^{-0.05t}$. Después de 15 años, la máquina tiene un valor de US$9560. ¿Cuál fue su valor inicial?.

Respuesta:

Es necesario obtener Q_0. Además como

$$Q(15) = 9560$$
$$Q_0 e^{-0.05(15)} = Q_0 e^{-0.75} = 9560$$

si multiplicamos ambos términos de la igualdad por $e^{0.75}$, se tiene lo siguiente:

$$Q_0 e^{-0.75}\left(e^{0.75}\right) = 9560\left(e^{0.75}\right)$$
$$Q_0 = 20238.52$$

por lo tanto, al inicio el valor de la máquina fue de US$20,238.52.

Interés compuesto continuamente

Para trabajar con problemas de este tipo, se recordará que:

Si un capital C está invertido a una tasa de interés "i" durante un período de "n" años, entonces el monto acumulado M de la inversión está dado por

- $M = C(1+i))$ Interés simple durante un año.
- $M = C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk}$ Interés compuesto k veces por año.
- $M = Ce^{in}$ Interés continuamente compuesto.

Problema 3.

Si en un banco se depositan $10,000 a una tasa del 7% de interés anual. ¿Calcular el monto acumulado al término de 15 años si el interés es pagado?

a) Cada cuatro meses
b) Cada mes
c) Diario
d) Continuamente

a) Para este inciso se aplica la fórmula $M = C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nk}$, en donde $C = 10000$, $i = 0.07$, $k = 3$ y $n = 15$. Luego:

$$M_{15} = 10000\left(1+\frac{0.07}{3}\right)^{3(15)} = 28{,}233.87$$

b) $M_{15} = 10000\left(1+\dfrac{0.07}{12}\right)^{12(15)} = 28,449.46$

c) $M_{15} = 10000\left(1+\dfrac{0.07}{365}\right)^{365(15)} = 28,573.63$

d) $M_{15} = 10000\, e^{0.07(15)} = 28,576.51$

Observemos que a medida que aumenta el número de veces que los intereses son pagados al año, la cantidad acumulada en el banco se va aproximando al resultado que se obtiene al utilizar la fórmula para los intereses continuamente compuestos.

4.6.2. Función Logarítmica

Respecto a los logaritmos comentaremos que John Napier los inventó para eliminar cálculos tediosos que se involucraban en la multiplicación, división, potencias y extracción de raíces de números grandes. En la actualidad con el uso de las calculadoras y las computadoras, los logaritmos ya no son importantes para dichos cálculos. Sin embargo los logaritmos se hacen presentes en problemas de crecimiento y decrecimiento exponencial dado que son inversos de las funciones exponenciales. Los logaritmos debido a sus leyes también son útiles en la medición de la intensidad de un sonido, la intensidad de los terremotos y muchos fenómenos.

Función Logaritmo Natural como inversa de la exponencial

La función logaritmo natural es la función inversa de la función exponencial; es decir, las funciones:

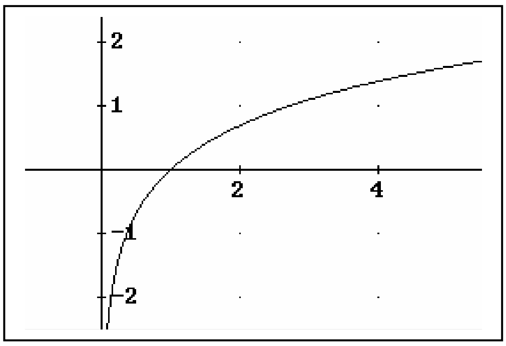
$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad f(x) = e^x$$

son funciones inversas y como uno de los resultados inherentes para funciones inversas se sabe que:

$$\ln(e^x) = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x$$

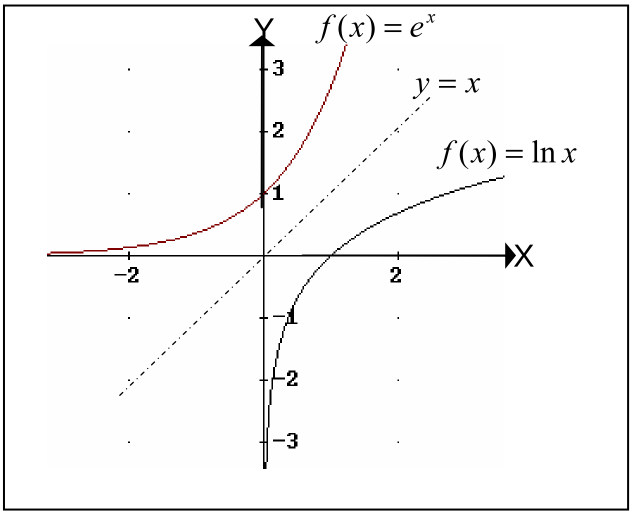
de igual forma $\ln(e^u) = u \quad \text{y} \quad e^{\ln u} = u$

También por ser inversas estas funciones se deduce que $D_f = (0,+\infty)$ y el $R_f = \mathbb{R}$. La gráfica de la función $f(x) = \ln x$ es:



En la grafica observemos que a medida que la x toma valores que se aproximan a cero, la función tiende a menos infinito y cuando x toma valores cada vez más grandes la función crece indefinidamente.

Otro de los resultados que debemos tener presente entre las funciones inversas, es que sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$; es decir las gráficas de las funciones: $f(x) = \ln x$ y $f(x) = e^x$ son:



Propiedades algebraicas

Estas propiedades se enunciarán solamente para las funciones

$$f(x) = \log_{10} x = \log x \quad \text{y} \quad f(x) = \log_e x = \ln x$$

por ser las que tienen más utilidad práctica.

1) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

2) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

3) $\log a^r = r \log a$

estas propiedades también se cumplen para $f(x) = \ln x$, es decir:

1) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

3) $\ln a^r = r \ln a$

Aplicaciones diversas de las funciones exponenciales y logarítmicas

1) Si $e^x = 3$. Obtener x.

Respuesta: $e^{x}=3 \Rightarrow \ln(e^{x})=\ln 3$

ahora como las funciones $\ln x$ y e^{x} son funciones inversas, sabemos que:

$\ln(e^{x})=x$, luego

$x=\ln 3=1.0986$

2) Si $e^{2-x}=0.5$ Obtener x.

Respuesta. $e^{2-x}=0.5 \Rightarrow \ln(e^{2-x})=\ln(0.5) \Rightarrow$

$2-x=\ln(0.5)$

$2-\ln(0.5)=x$

$x=2-(-0.6931)$

$\therefore \quad x=2.6931$

3) Si $\ln x=4.35$, obtener x.

Respuesta: $\ln x=4.35$

$e^{\ln x}=e^{4.35}$

$x=e^{4.35}$

$\therefore \quad x=77.47$

4) Si $\ln(4x-10)=5$. Obtenga x.

$$e^{l\,\mathrm{n}(4x-10)}=e^{5}$$

$$4x-10=148.41$$

$$4x=148.41+10$$

$$x=\frac{158.41}{4}$$

$$x=39.6$$

5) Si $\ln(x^{2}+5)=3$. Obtenga x.

$$e^{l\,\mathrm{n}(x^{2}+5)}=e^{3}$$

$$x^{2}+5=20.08$$

$$x^{2}=20.08-5$$

$$x=\pm\sqrt{15.08}$$

$$x=\pm 3.88$$

6) Si $e^{6-7x}=100$. Obtenga x.

$$\ln\left(e^{6-7x}\right)=\ln 100$$
$$6-7x=4.6$$
$$-7x=4.6-6$$
$$x=\frac{-1.4}{-7}$$
$$x=0.2$$

7) Si $e^{2x-3/4x+5}=500$. Obtenga x.

$$\ln\left(e^{2x-3/4x+5}\right)=\ln 500$$
$$\frac{2x-3}{4x+5}=6.21$$
$$2x-3=6.21(4x+5)$$
$$2x-3=24.84x+31.05$$
$$-3-31.05=24.84x-2x$$
$$-34.05=22.84x$$
$$x=\frac{-34.05}{22.84}$$
$$x=-1.49$$

Otros ejemplos en donde se utilizan las funciones exponenciales y logarítmicas son los siguientes.

8) Supóngase que se invierta la cantidad de \$10,000 a una tasa de interés del 10% anual. Obtenga el tiempo necesario para que la cantidad invertida se triplique si el interés se calcula de acuerdo a lo siguiente:
   a) Compuesto semestralmente
   b) Compuesto continuo

   Respuesta

   a) Al sustituir en la fórmula $M=C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{nt}$, se tiene lo siguiente: como $C=10{,}000$, entonces $M=30{,}000$, $i=0.1$ y $k=2$. Luego

$$30,000 = 10,000\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^{2t}$$

$$\frac{30,000}{10,000} = \left(1+\frac{0.1}{2}\right)^{2t} \quad \text{se toma el logaritmo de ambos lados}$$

$$\log 3 = \log(1+0.05)^{2t} \quad \text{se utiliza una de las propiedades de los logaritmos}$$

$$\log 3 = 2t\log(1.05) \quad \text{se despeja la "t"}$$

$$\frac{\log 3}{2\log(1.05)} = t \quad luego$$

$$t \approx \frac{0.4771}{0.04237} = 11.26$$

Por lo tanto, del dinero se triplicará a los 11.26 años.

b) En este ejemplo se utilizará la fórmula del interés continuamente compuesto, siendo esta $M = Ce^{it}$, en donde $C = 10{,}000$, entonces $M = 30{,}000$ y $i = 0.1$.

$$\begin{aligned} 10,000e^{0.1t} &= 30,000 \\ e^{0.1t} &= \frac{30,000}{10,000} \\ \ln\left(e^{0.1t}\right) &= \ln 3 \\ 0.1t &\approx 1.098 \\ t &\approx \frac{1.098}{0.1} \\ t &\approx 10.98 \end{aligned}$$

Luego el dinero se triplicará a los 10.98 años.

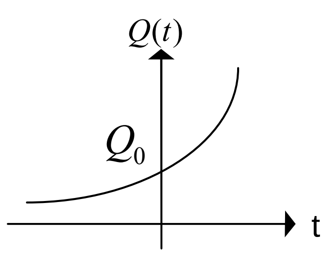
Crecimiento Exponencial

Se recuerda que el modelo matemático que representa el crecimiento exponencial, está dado de la forma siguiente:

$Q(t)$ crece exponencialmente si $Q(t) = Q_0 e^{kt}$

cuando $k > 0$ y Q_0 es el valor inicial $Q(0)$.

Al considerar las gráficas vistas anteriormente, nos damos cuenta que la gráfica de la función $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ es de la forma:



9) **Proyección de la población mundial**

La población del mundo en 1995 era de 5,700 millones, y la tasa de crecimiento relativa estimada es de 2% al año.
Si la población sigue creciendo a esta tasa, ¿cuándo alcanzará 60,000 millones de personas?

Respuesta. Como $Q_0 = 5,700$ millones, $k = 0.02$ y $Q(t) = 57,000$ millones de personas, entonces:

$$\begin{aligned} 5.7e^{0.02t} &= 60 \\ e^{0.02t} &= \frac{60}{5.7} \\ \ln\left(e^{0.02t}\right) &= \ln 10.5263 \\ 0.02t &\approx 2.3538 \\ t &\approx \frac{2.3538}{0.02} \\ t &\approx 117.69 \end{aligned}$$

Luego la población llegará a los 60,000 millones de personas aproximadamente en 117 años.

10) **Bacterias en un cultivo**

Un cultivo se inicia con 15,000 bacterias y su número se duplica cada 50 minutos. Obtenga:

a) Una fórmula para el número de bacterias en le tiempo t.
b) Determine el tiempo de bacterias después de 1.5 horas.
c) ¿Después de cuántos minutos habrá 60,000 bacterias.
d) Trace la gráfica en el tiempo t.

a) Para determinar la fórmula del crecimiento de la población necesitamos obtener la tasa k. Para ello utilizamos la fórmula con $Q_0 = 15,000,\quad t = 50 \quad y \quad Q(t) = 30,000$, y posteriormente se despeja k.

$$
\begin{aligned}
15{,}000e^{k(50)} &= 30{,}000 \\
e^{50k} &= \frac{30{,}000}{15{,}000} \\
\ln\left(e^{50k}\right) &= \ln 2 \\
50k &= \ln 2 \\
k &= \frac{\ln 2}{50} \\
k &= 0.01386
\end{aligned}
$$

Luego la fórmula del crecimiento de la población, ya que $k = 0.01386$ es:

$$Q(t) = 15{,}000 \cdot e^{0.01386t}$$

b) Utilizaremos la fórmula $Q(t) = 15{,}000 \cdot e^{0.01386t}$, cuando t=90 minutos.

$$
\begin{aligned}
Q(90) &= 15{,}000 \cdot e^{0.01386(90)} \\
&= 52219.19
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el número de bacterias después de 90 minutos es aproximadamente 52219.

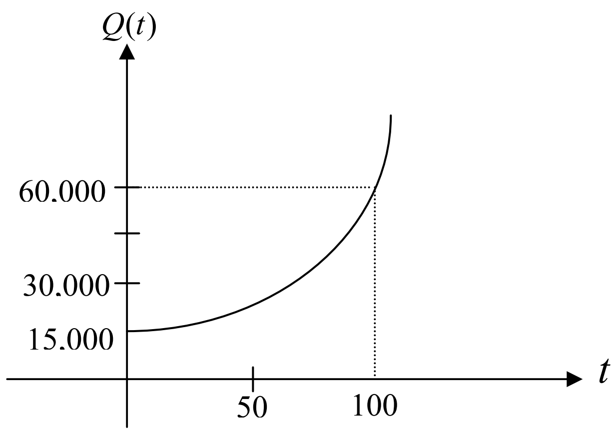
c) En este inciso utilizaremos la fórmula $Q(t) = 15{,}000 \cdot e^{0.01386t}$ cuando $Q(t) = 60{,}000$ y se despeja t.

$$
\begin{aligned}
60{,}000 &= 15{,}000 \cdot e^{0.01386t} \\
e^{0.01386t} &= \frac{60{,}000}{15{,}000} \\
\ln\left(e^{0.01386t}\right) &= \ln 4 \\
0.01386t &= \ln 4 \\
t &= \frac{\ln 4}{0.01386} \\
t &= 100.02
\end{aligned}
$$

El número de bacterias será 60,000 en aproximadamente 100 minutos.

d) En la siguiente figura se muestra la grafica de

$$Q(t) = 15{,}000 \cdot e^{0.01386t}$$



Ejercicios

I. Indique el dominio, construya la grafica y diga cual es el rango para cada función que se da.

1) $f(x) = e^{2x}$	2) $f(x) = e^{x-3}$
3) $f(x) = e^{x+3}$	4) $f(x) = e^{2x+5}$
5) $f(x) = e^{-x}$	6) $f(x) = e^{1-x}$
7) $f(x) = e^{2-3x}$	8) $f(x) = e^{x^2}$
9) $f(x) = e^{x^2-1}$	10) $f(x) = e^{x^2-4}$
11) $f(x) = e^{x} + 1$	12) $f(x) = e^{x-3} + 2$
13) $f(x) = e^{x+3} - 3$	14) $f(x) = 2 - e^{2x+5}$
15) $f(x) = 1 - e^{-x}$	16) $f(x) = e^{1-x} + 5$
17) $f(x) = 2 - e^{2-3x}$	18) $f(x) = e^{x^2} + 4$

II. Resuelva los problemas que se plantean a continuación:

1) Si se invierten \$10,000 a una tasa anual del 8%. Obtenga la cantidad acumulada después de 15 años, si el interés es pagado.
   a) Anualmente
   b) Trimestralmente
   c) Mensualmente
   d) continuamente

2) Si se invierten \$15,000 a una tasa anual del 9%. Obtenga la cantidad acumulada después de 15 años, si el interés es pagado.
   a) Anualmente
   b) Trimestralmente
   c) Mensualmente
   d) Diariamente
   e) continuamente

3) Una suma de dinero se invierte a una tasa de interés fijo y el interés es capitalizado continuamente. Después de 15 años el dinero se ha

duplicado. ¿Cómo será el saldo al término de 30 años, comparado con la inversión inicial?

4) Una suma de dinero se invierte a una tasa de interés fijo y el interés es capitalizado cada dos meses. Después de 10 años el dinero se ha triplicado. ¿Cómo será el saldo al término de 20 años, comparado con la inversión inicial?

5) ¿Qué cantidad es necesario invertir en este momento a una tasa de interés del 10%, que es capitalizado cada tres meses, de forma tal que dentro de dentro de 8 años sea $20,000?

6) Se proyecta que dentro de t años la población de cierto país será $Q(t) = 45e^{0.03t}$ millones.
   a) ¿Cuál es la población actual?
   b) ¿Cuál será la población dentro de 20 años?

7) Que cantidad se debe invertir hoy a una tasa de interés anual de 9% capitalizable continuamente, para que dentro de 10 años su valor sea $30,000.

8) Se estima que la población de cierto país crece exponencialmente. Si la población era de 50 millones en 1985 y de 70 millones en 1992. ¿Cuál será la población en el 2002?

9) Los siguientes datos fueron reunidos por un investigador durante los primeros 15 minutos de un experimento destinado a estudiar el aumento de bacterias:

Número de minutos	0	15
Número de bacterias	6000	10,000

Suponiendo que el número de bacterias crece exponencialmente. ¿Cuántas bacterias habrá después de 40 minutos?

10) La densidad de población a x kilómetros del centro de cierta ciudad es de $Q(t) = 13e^{-0.08}$ miles de personas por kilómetro cuadrado.
   a) ¿Cuál es la densidad de la población en el centro de la ciudad?
   b) ¿Cuál es la densidad de la población a 12 kilómetros del centro de la ciudad?

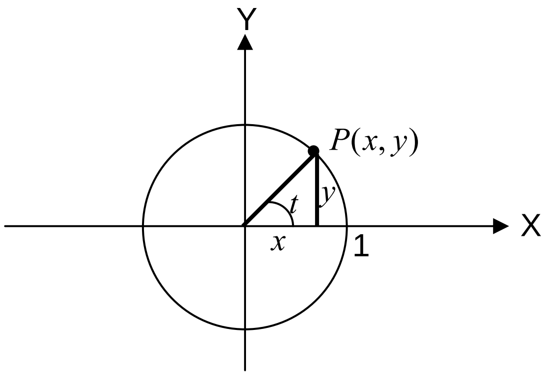
11) La cantidad que queda de una muestra de una sustancia radiactiva después de t años está dada por la función $Q(t) = Q_0 e^{-0.0002t}$ después de 4500 años quedan 2,000 gramos de la sustancia. ¿Cuántos gramos había al principio?

12) Una sustancia radioactiva se desintegra exponencialmente. Si al comienzo había 600 gramos de la sustancia y 60 años después hay 500 gramos. ¿Cuántos gramos habrá después de 200 años.

4.6.3. Funciones trigonométricas y sus gráficas

Funciones Seno y Coseno

Supongamos que $P(x, y)$ es cualquier punto sobre el círculo unitario centrado en el origen y que t es el ángulo que se muestra en la figura:



Además se sabe que:

$$sent = \frac{C.O}{H} = \frac{y}{1} = y \quad y \quad \cos t = \frac{C.A}{H} = \frac{x}{1} = x.$$

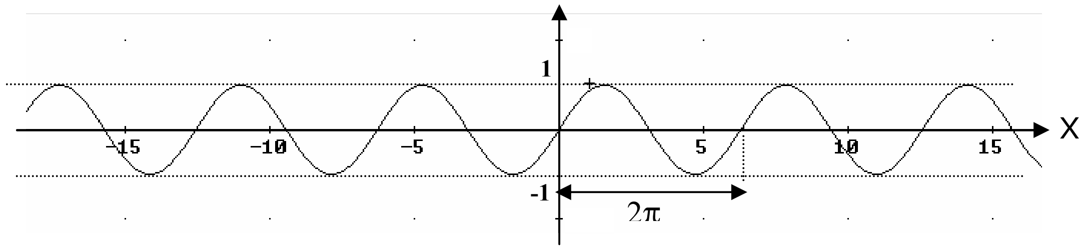
$$Luego \qquad \boxed{sent = y \quad y \quad \cos t = x}$$

Como estas funciones fueron definidas en términos del círculo unitario se les llama **funciones circulares.**

En base a los resultados anteriores, se deduce el valor del seno y del coseno para los ángulos indicados:

Ángulo	0	π/2	π	(3/2) π	2π
Sent	0	1	0	-1	0
Cost	1	0	-1	0	1

Al trabajar con estos resultados y otros que se obtienen usando el círculo unitario, podemos construir la grafica de la función $f(t) = sent = y$, cuyo dominio es $D_f = \mathbb{R}$ y el rango es $R_f = [-1,1]$.



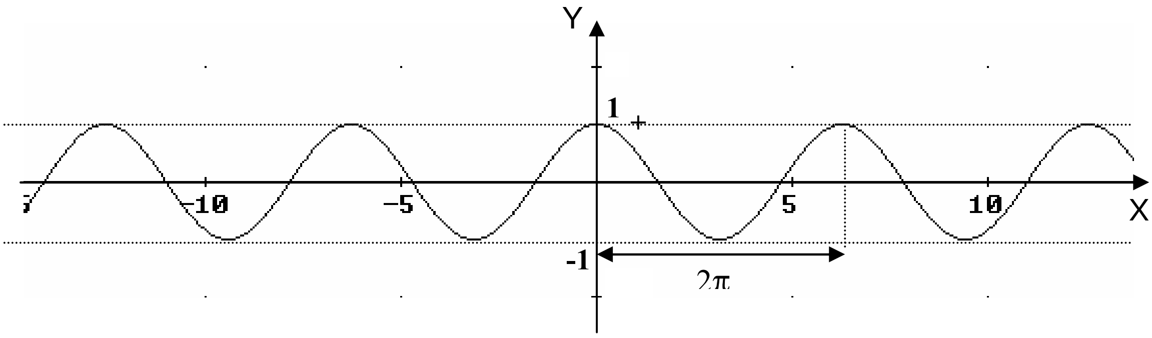
$f(t) = sent$

Observación. Para construir la grafica del origen hacia la izquierda se rota el ángulo t en le sentido contrario a las manecillas del reloj.

Propiedades de la función $f(t) = sent$.

- Como cada 2π se repite la misma grafica, se dice que el periodo de la función sen t es 2π. Luego $sen(t + 2\pi) = sent$.
- También en la grafica se observa que $sen(-t) = -sent$. Por esta razón se dice que $f(t) = sent$ es una función impar.

Para la función $f(t) = \cos t = x$, el dominio $D_f = \mathbb{R}$ y el rango $R_f = [-1,1]$. Su grafica es la siguiente:



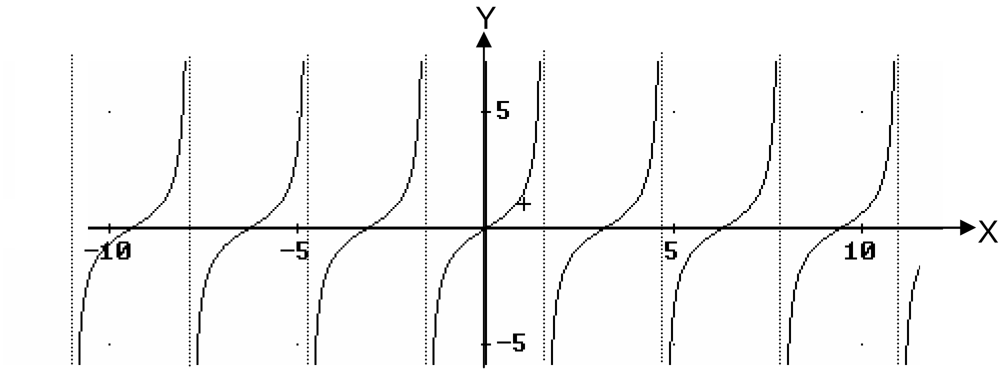
$f(t) = \cos t$

Propiedades para la función $f(t) = \cos t$.

- $\cos(t + 2\pi) = \cos t$; es decir su período es 2π.
- $\cos(-t) = \cos t$; es decir es una función par.

Funciones Tangente y Cotangente

Sabemos que $\tan(t)=\frac{C.O}{C.A}=\frac{y}{x}=\frac{sent}{\cos t}$, es decir: $\tan(t)=\frac{sent}{\cos t}$. El $D_f=\mathbb{R}-\{t|\cos t=0\}=\mathbb{R}-\left\{t=\frac{n\pi}{2}|n=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\cdots\right\}$ y el $R_f=\mathbb{R}$. Al considerar las graficas de las funciones sent y cost, se deduce que la grafica de la función $f(t)=\tan(t)=\frac{sent}{\cos t}$ es:



$-\frac{5}{2}\pi \quad -\frac{3}{2}\pi \quad -\frac{1}{2}\pi \quad \frac{1}{2}\pi \quad \frac{3}{2}\pi \quad \frac{5}{2}\pi$

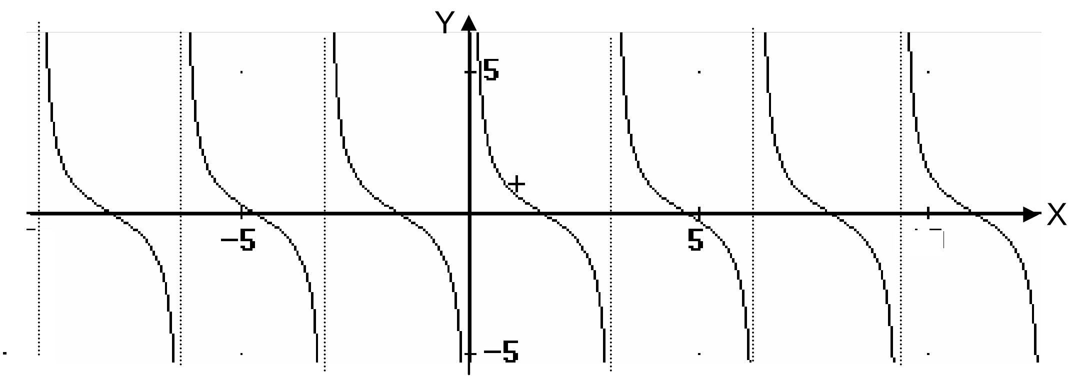
$f(t)=\tan(t)$

Al observar la grafica de la función $f(t)=\tan(t)$ se obtiene que:

- Su período es π; es decir: $\tan(t+\pi)=\tan(t)$
- Sus asíntotas verticales pasan por $\cdots-\frac{3}{2}\pi,\quad -\frac{1}{2}\pi,\quad \frac{1}{2}\pi\quad \frac{3}{2}\pi,\cdots$
- $\tan(-t)=-\tan(t)$; es decir es impar.

Función cotangente

Este función se define de la forma $\cot(t)=\frac{C.A}{C.O}=\frac{x}{y}=\frac{\cos t}{sent}$, es decir: $\cot(t)=\frac{\cos t}{sent}$. El $D_f=\mathbb{R}-\{t|sent=0\}=\mathbb{R}-\{t=n\pi|n=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots\}$ y el $R_f=\mathbb{R}$. Al considerar las graficas de las funciones sent y cost, se deduce que la grafica de la función $f(t)=\cot(t)=\frac{\cos t}{sent}$ es:



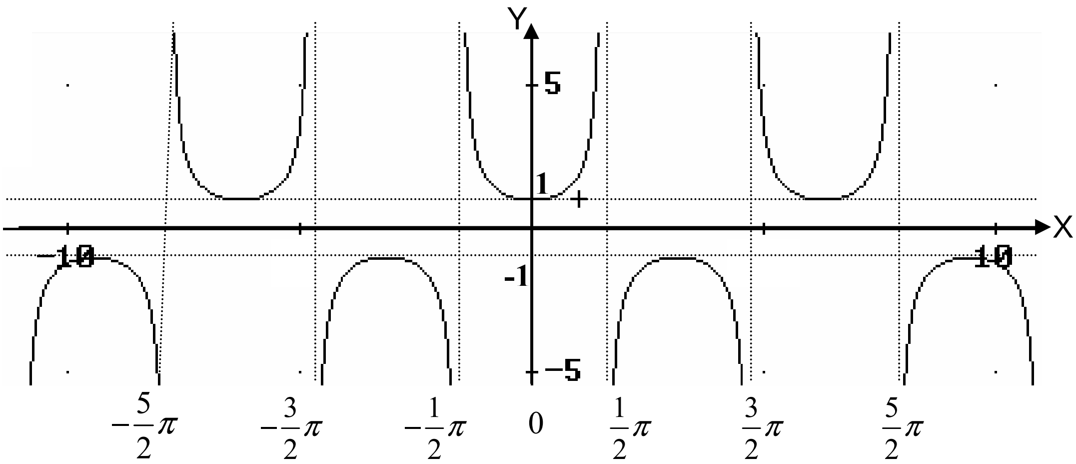
En base a la grafica de $f(t)=\cot(t)$ se deduce que:

- Su período es π; es decir: $\cot(t+\pi)=\cot(t)$.
- Sus asíntotas verticales pasan por $\cdots -3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \ \pi,\ \ 2\pi,\ \ 3\pi,\cdots$
- $\cot(-t)=-\cot(t)$; es decir es impar.

Funciones Secante y Cosecante

Función secante

Se sabe que $\sec(t)=\dfrac{H}{C.A}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\cos t}$ **es decir:** $\sec(t)=\dfrac{1}{\cos t}$**. El** $D_f=\mathbb{R}-\{t \mid \cos t=0\}=\mathbb{R}-\left\{t=\dfrac{n\pi}{2} \,\middle|\, n=\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\cdots\right\}$ **y el** $R_f=\mathbb{R}$**. Al considerar la grafica de la función** $\cos t$**, se deduce que la grafica de la función** $f(t)=\sec(t)=\dfrac{1}{\cos t}$ **es:**



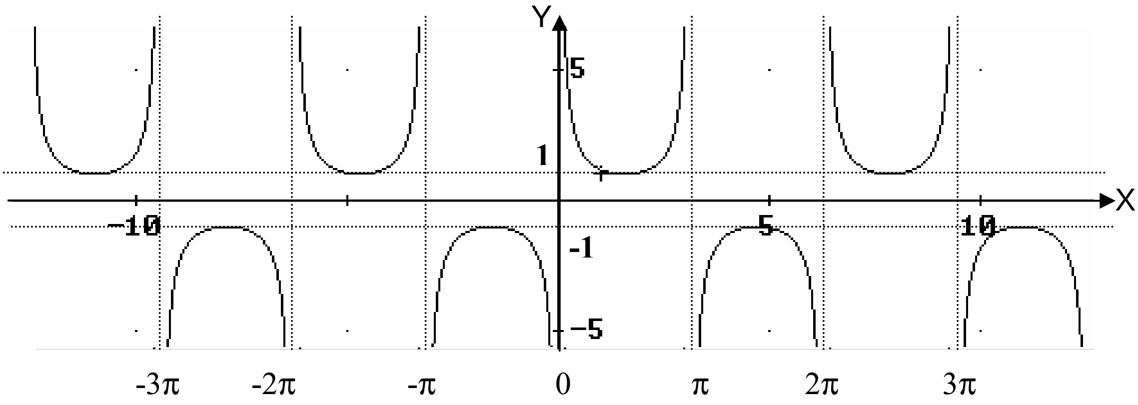
$$f(t)=\sec(t)$$

Propiedades de la función secante

- El período es 2π; es decir $\sec(x+2\pi)=\sec x$.
- Sus asíntotas verticales pasan por $\cdots -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi,\cdots$.
- $\sec(-t)=\sec(t)$; es decir es par.

Función cosecante

Sabemos que $\csc(t)=\dfrac{H}{C.O}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{sent}$ **es decir:** $\csc(t)=\dfrac{1}{sent}$**. El** $D_f=\mathbb{R}-\{t\,|\,sent=0\}=\mathbb{R}-\{t=n\pi\,|\,n=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots\}$ **y el** $R_f=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)=\mathbb{R}-(-1,1)$**. Al considerar la grafica de la función sent, se deduce que la grafica de la función** $f(t)=\csc(t)=\dfrac{1}{sent}$ **es:**



$f(t)=\csc(t)$

Propiedades de la función cosecante

- El período es 2π; es decir $\csc(x+2\pi)=\csc x$.
- Sus asíntotas verticales pasan por $\cdots-3\pi,-2\pi,-\pi,\pi,2\pi,3\pi,\cdots$.
- $\csc(-t)=-\sec(t)$; es decir es impar.

Algunas identidades trigonométricas

Identidades fundamentales

1) $\tan t=\dfrac{sent}{\cos t}$ 2) $\cot t=\dfrac{\cos t}{\tan t}$

3) $\sec t=\dfrac{1}{\cos t}$ 4) $\csc t=\dfrac{1}{sent}$

Identidades pitagóricas

5) $sen^2t+\cos^2 t=1$ 6) $sen^2t=1-\cos^2 t$

7) $\cos^2 t=1-sen^2t$ 8) $1+\cot^2 t=\csc^2 t$

9) $\tan^2 t+1=\sec^2 t$

Identidades de suma y resta de ángulos

10) $sen(a+b) = sena\cos b + \cos asenb$ 11) $sen(a-b) = sena\cos b - \cos asenb$

12) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - senasenb$ 13) $\cos(a-b) = \cos a\cos b + senasenb$

Identidades de ángulos dobles

de la propiedad 10 se deduce que:
$sen(a+a) = sena\cos a + \cos asena = 2sena\cos a$

14) $sen(2a) = 2sena\cos a$

de la misma forma de la propiedad 12 se obtiene:

$$\cos(a+a) = \cos a\cos a - senasena = \cos^2 a - sen^2 a$$

15) $\cos(2a) = \cos^2 a - sen^2 a$

Aplicaciones de las funciones trigonométricas

Problemas que involucran fenómenos periódicos

Las funciones trigonométricas resultan ideales para modelar el comportamiento periódico. Si observamos las gráficas de las funciones seno y coseno, nos damos cuenta que exhiben un comportamiento periódico. Las observaciones respecto a cómo las funciones seno y coseno modelan el comportamiento periódico se resumen a continuación.

Movimiento armónico simple

Si la ecuación que describe el desplazamiento y de un objeto t es

$$y = asenwt \quad o \quad y = a\cos wt$$

entonces el objeto está sujeto a **movimiento armónico simple.** En este caso:

amplitud $=|a|$ Desplazamiento máximo del objeto

periodo $=\dfrac{2\pi}{w}$ Tiempo necesario para completar un ciclo

Frecuencia$=\dfrac{w}{2\pi}$ Número de ciclos por unidad de tiempo

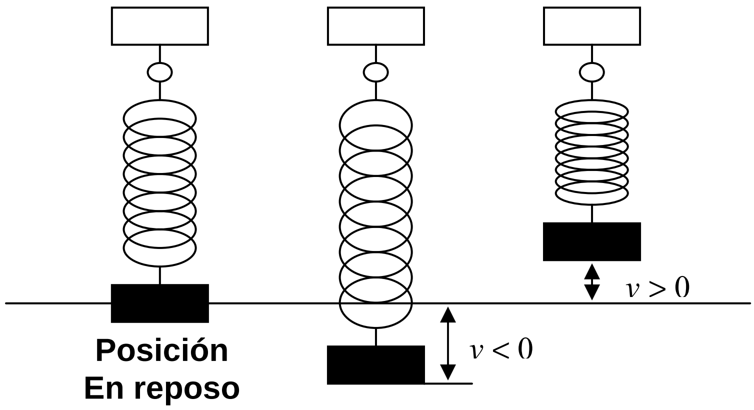
Observemos que las funciones

$$y = asen2\pi vt \quad y \quad y = a\cos 2\pi vt$$

tienen una frecuencia v, ya que $\frac{2\pi v}{2\pi} = v$, debido a que de estas ecuaciones podemos obtener inmediatamente la frecuencia, es común escribir las ecuaciones del movimiento armónico de esta forma.

Ejemplos de reporte en vibración

1) El desplazamiento de la masa de la figura está dado por $y = 12sen6\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Describa el movimiento de la masa. (Supóngase que no existe fricción, por esta razón el resorte y el peso oscilarán sin cambios de manera indefinida).



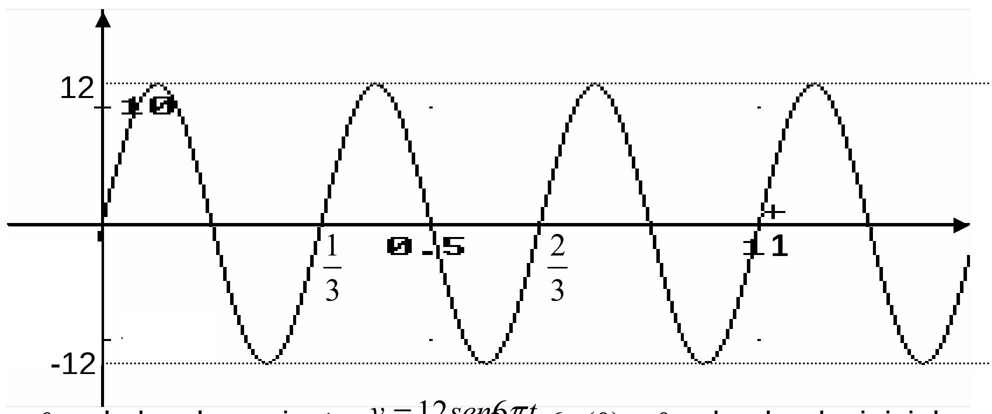
Respuesta. Como la masa está en movimiento armónico simple, entonces:

$$\text{amplitud} = |a| = 12$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Frecuencia} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$$

Luego el desplazamiento máximo de la masa es de 12cm, necesita $\frac{1}{3}$ de segundo para completar un ciclo y pasa por 3 ciclos completos cada segundo, como se muestra en la figura.



En $t = 0$, el desplazamiento es $y = 12sen6\pi(0) = 0$, de donde inicialmente la masa está en su posición de reposo. Una descripción del movimiento está dada por la grafica. Observemos que y es el desplazamiento de la masa por arriba si su posición de reposo. Luego cuando $y > 0$, la masa está por encima de su posición de reposo y cuando $y < 0$, está por debajo de la posición de reposo.

La diferencia principal entre las dos ecuaciones que describen en movimiento armónico simple, es el punto de partida. En $t = 0$ se obtiene:

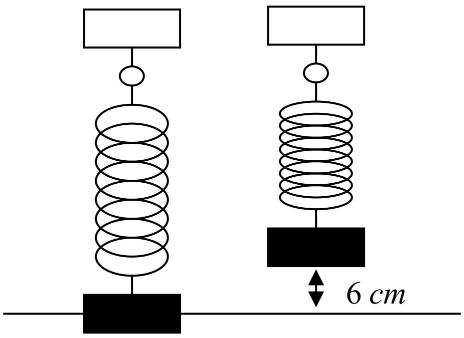
$$y = asenw(0) = 0 \quad y \quad y = a\cos w(0) = a$$

Es decir, en el primer caso el movimiento se inicia con cero desplazamientos, en tanto que en el otro caso el movimiento se inicia con el desplazamiento al máximo (en la amplitud). Naturalmente, podemos pensar en el movimiento como iniciándose en cualquier punto de su ciclo. En este caso las ecuaciones del movimiento armónico simple toman la forma

$$y = asenw(t+\theta) \quad y \quad y = a\cos w(t+\theta)$$

donde θ de termina el punto de partida.

2) Una masa está suspendida de un resorte como se muestra en la figura. El resorte se comprime una distancia de 6cm y luego se libera. Se observa que la masa regresa al punto comprimido después de $\frac{1}{4}$ segundos. Describa el movimiento de la masa.



Respuesta. El movimiento de la masa está dado por una de las ecuaciones del movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es de 6cm. En vista de que esta amplitud se alcanza en el tiempo $t = 0$, cuando la masa se libera, la ecuación apropiada para su uso es

$$y = a\cos wt$$

el periodo es $p = \frac{1}{4}$, por lo que la frecuencia es $\frac{1}{p} = 4$. El movimiento de la masa queda descrito por la ecuación

$$\begin{aligned} y &= 6\cos(2\pi \cdot 4t) \\ &= 6\cos 8\pi t \end{aligned}$$

donde y es el desplazamiento a partir de la posición de reposo en el tiempo t. Obsérvese que cuando $t = 0$ el desplazamiento es $y = 6$, como se esperaba.

Otros ejemplos en donde ocurre el movimiento armónico simple es en la producción del sonido. El sonido produce una variación periódica en la presión del aire en relación con la presión normal. Si la presión varía con movimiento armónico simple, entonces se produce un sonido puro. El tono del sonido depende de la frecuencia y el volumen de la amplitud.

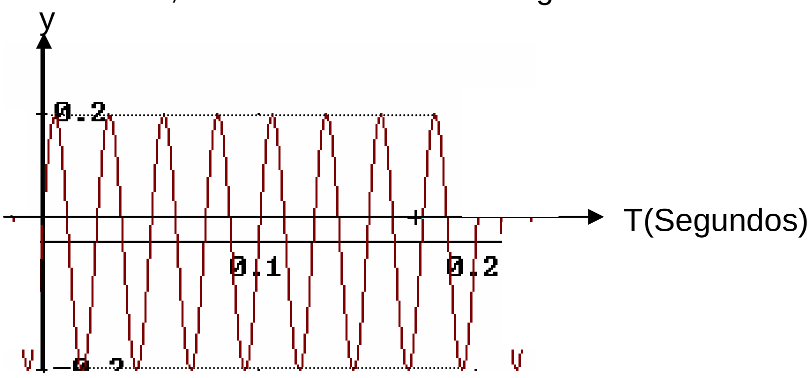
Ejemplo sobre la producción del sonido

2) Un ejecutante de tuba toca la nota mi y sostiene el sonido durante cierto tiempo. Suponiendo que el sonido es mi puro, su ecuación está dada por

$$V(t) = 0.2sen80\pi t$$

donde $V(t)$ es la variación en presión de la presión normal en el tiempo t, medida en libras por pulgada cuadrada. Determine la frecuencia, la amplitud y el periodo del sonido. Si el ejecutante incrementa el volumen de la nota, ¿de qué manera cambia la ecuación de $V(t)$? ¿Si el ejecutante está tocando la nota incorrectamente y está ligeramente grave, de que manera afecta a $V(t)$?.

Respuesta. La frecuencia es $\frac{80\pi}{2\pi} = 40$, el periodo es $\frac{1}{40}$ y la amplitud es de 0.2, como se muestra en la figura.



$$y = 0.2sen80\pi t$$

Si el ejecutante incrementa el volumen, la amplitud de la onda aumenta. En otras palabras, el número 0.2 es reemplazado por otro número mayor. Si la nota es grave, entonces la frecuencia es inferir a 40. En este caso, el coeficiente de t es inferior a 80π.

Ejercicios

I. Indique el dominio, construya la grafica y diga cuál es el rango para cada una de las funciones que se dan:

1) $f(x) = sen(2x)$ 2) $f(x) = 3sen(2x)$

3) $f(x) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

4) $f(x) = 3\cos(2x)$

5) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

6) $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

7) $f(x) = \tan(2x)$

8) $f(x) = 3\tan(2x)$

9) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

10) $f(x) = 3\cot(2x)$

11) $f(x) = \cot\left(\frac{1}{2}x\right)$

12) $f(x) = 2\cot\left(\frac{1}{2}x\right)$

13) $f(x) = \sec(2x)$

14) $f(x) = \sec(2x) + 2$

15) $f(x) = \sec\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$

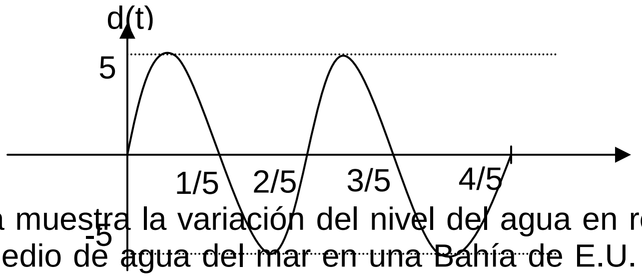
16) $f(x) = 3sec(2x)$

17) $f(x) = \csc\left(\frac{1}{2}x\right)$

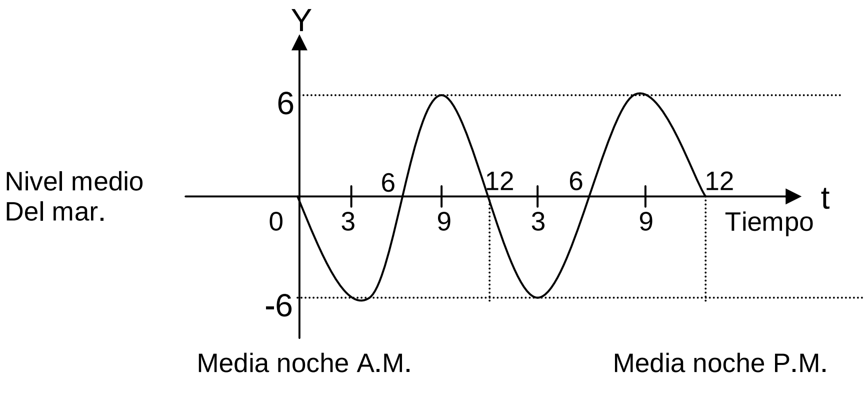
18) $f(x) = \csc\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$

II. Resuelva los problemas que se plantean a continuación:

1) La gráfica que se indica da el desplazamiento $d(t)$ en el tiempo t de un objeto en movimiento armónico simple. Obtenga una fórmula para la función $d(t)$.

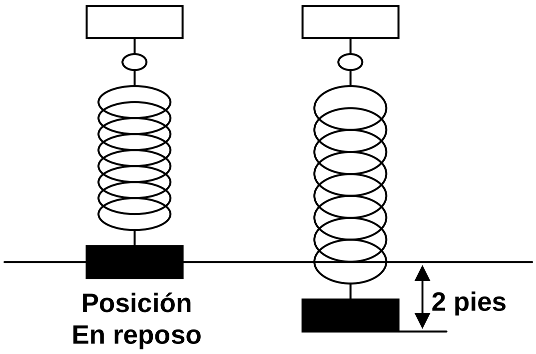


2) La gráfica muestra la variación del nivel del agua en relación con el nivel medio de agua del mar en una Bahía de E.U. durante un periodo particular de 24 horas. Si se supone que esta variación está modelada por un movimiento armónico simple, obtenga una ecuación de la forma $y = asenwt$ que describa la variación del nivel del agua como una función del número de horas transcurridas después de media noche.



3) En la Nueva Escocia existe una Bahía que tiene las mareas más altas del mundo. En un periodo de 12 horas, la altura del agua inicia al nivel medio del mar, se eleva 21 pies, después desciende 21 pies y regresa al nivel medio del mar. Suponiendo que el movimiento de las mareas es armónico simple, obtenga una ecuación que describa la altura de la marea en dicha Bahía por encima del nivel medio del mar.

4) Una masa suspendida de un resorte es jalada hacia abajo una distancia de 2 pies de su posición de reposo, según se observa en la figura. La masa se libera en el tiempo t=0 y se le permite oscilar. Si la masa regresa a su posición después de 1 segundo, obtenga una ecuación que describa el movimiento.



5) Una masa está suspendida de un resorte. El resorte está comprimido de tal forma que la masa está 5 cm por encima de su posición de reposo. Se suelta la masa en el tiempo t=0 permitiéndose oscilar. Se observa que la masa alcanza su punto más bajo $\frac{1}{2}$ de segundo después de haberse liberado. Obtenga una ecuación que describa el movimiento de la masa.

4.6.4. Funciones Implícitas

Las funciones que hemos visto hasta el momento, se caracterizan porque se separan las variables; es decir, del lado izquierdo generalmente aparece la variable "y" (representada por $f(x)$) y del lado derecho la variable "x". En las funciones implícitas, que son las que ocupan nuestra atención, las variables no están separadas, esto es, las variables se encuentran mezcladas como ocurre en los ejemplos de funciones implícitas que se dan:

- $2xy + x + y = 10$

- $x^2 + y^2 = 4$
- $4xy^2 + xy = x^2 + 2y$
- $3x^2 y + xy^2 - x - y = 0$
- $5x^2 y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$
- $7x^4 y^5 = \dfrac{4x^2 + 2y}{3x + 4y}$
- $(x + 2y)^3 + \sqrt{x + y} = 2xy$
- etc.

Estas funciones serán de nuestro máximo interés cuando se estudie el tema de la derivada.

UNIDAD 5

LÍMITES

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno será capaz de:

- ♦ Comprender el concepto de sucesión y calcular su límite.
- ♦ Comprender la idea intuitiva del límite de una función y su definición.
- ♦ Calcular límites de diferente índole de una función.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

5) LÍMITES

5.1. Sucesiones: definición, tipos de sucesiones.

Definición.

Una sucesión es un caso particular de una función en la que el dominio son todos los números naturales y el contradominio son los números reales. Esto se denota como:

$$S_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

cuando $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\cdots\}$.

Los elementos del contradominio se llaman términos de la sucesión, es decir: S_1 es el primer término, S_2 es el segundo término y en general S_n es el término
n-ésimo

Ejemplos de sucesiones

1. $S_n = \frac{1}{n}$ 2. $S_n = \frac{n-1}{n}$ 3. $S_n = \frac{n}{n+2}$

4. $S_n = \frac{1}{2^n}$ 5. $S_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 6. $S_n = (-1)^n$

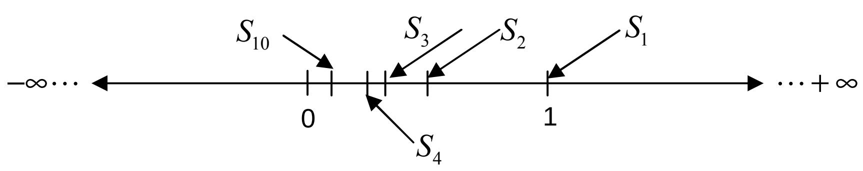
7. $S_n = \sqrt{n}$ Para todos los ejemplos $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos.

Para cada sucesión, obtener algunos términos, graficarlos sobre la recta real y observar el punto hacia donde tiende cada sucesión.

1. $S_n = \frac{1}{n}$

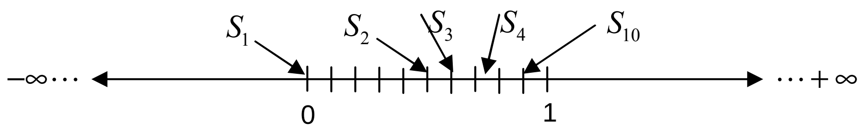
Solución: $S_1 = 1,\quad S_2 = \frac{1}{2},\quad S_3 = \frac{1}{3},\quad S_4 = \frac{1}{4}, \cdots S_{10} = \frac{1}{10}$



En base a los términos obtenidos y a la gráfica realizada podemos observar que la sucesión se va aproximando a cero. Además como n toma cualquier número natural, la sucesión tiene un número infinito de términos. Ahora si se considera un intervalo que contenga al cero, por muy pequeño que éste sea dentro de el siempre hay un número infinito de términos de la sucesión y fuera de el un número finito. (Posteriormente se dirá que cuando ocurre lo anterior, el límite de la sucesión es cero).

2. $S_n = \dfrac{n-1}{n}$

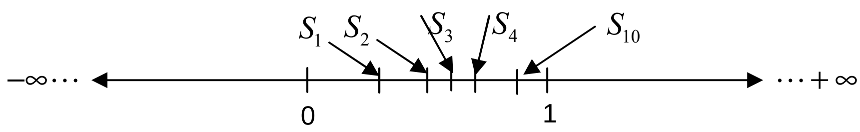
Solución: $S_1 = 0, \quad S_2 = \frac{1}{2}, \quad S_3 = \frac{2}{3}, \quad S_4 = \frac{3}{4}, \cdots S_{10} = \frac{9}{10}$



Ahora se observa que la sucesión a medida que n toma valores cada vez más grandes, se va aproximando a uno. Nuevamente si se consideran intervalos que contengan al uno, por muy pequeños que éstos sean dentro de ellos siempre hay un número infinito de términos de la sucesión y fuera de ellos un número finito.

3. $S_n = \dfrac{n}{n+2}$

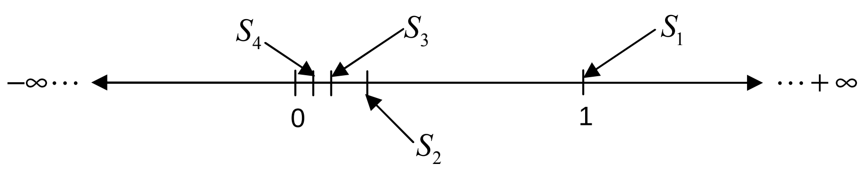
Solución: $S_1 = \frac{1}{3}, \quad S_2 = \frac{1}{2}, \quad S_3 = \frac{3}{5}, \quad S_4 = \frac{2}{3}, \cdots S_{10} = \frac{5}{6}$



La sucesión tiende a uno a medida que n toma valores cada vez más grandes. Y si se consideran intervalos que contengan al uno, tan pequeños como se quieran, ocurre lo mismo que en los dos ejemplos anteriores.

4. $S_n = \dfrac{1}{2^n}$

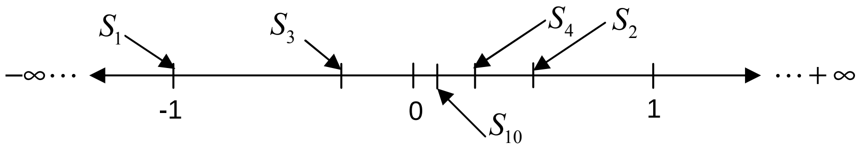
Solución: $S_1 = 1, \quad S_2 = \frac{1}{4}, \quad S_3 = \frac{1}{8} \quad y \quad S_4 = \frac{1}{16}$



Esta sucesión se aproxima a cero a medida que n toma valores cada vez más grandes.

5. $S_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

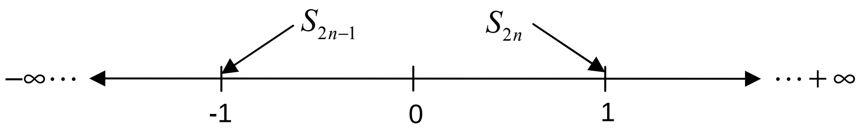
Solución: $S_1 = -1, \quad S_2 = \frac{1}{2}, \quad S_3 = -\frac{1}{3}, \quad S_4 = \frac{1}{4}, \cdots, S_{10} = \frac{1}{10}$



Esta sucesión se aproxima a cero a medida que n toma valores cada vez más grandes.

6. $S_n = \left(-1\right)^n$

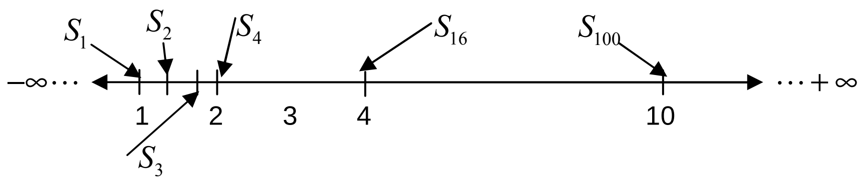
Solución: $S_1 = -1, \quad S_2 = 1, \quad S_3 = -1, \quad S_4 = 1, \cdots$



Esta sucesión toma únicamente dos valores, cuando a la n se le dan valores impares la sucesión toma el valor de -1 y cuando a la n se le dan valores pares la sucesión toma el 1. Ahora si se consideran intervalos tan pequeños como se quieran que contengan al -1 o al 1, ocurre que existen una infinidad de términos de la sucesión dentro y fuera de cada intervalo. (Posteriormente se dirá que cuando esto ocurre, la sucesión no tiene límite, es decir el límite es único si este existe).

7. $S_n = \sqrt{n}$

Solución: $S_1 = 1, \quad S_2 = \sqrt{2}, \quad S_3 = \sqrt{3}, \quad S_4 = 2, \cdots, S_{10} = \sqrt{10}$



En esta sucesión se observa que a medida de que la n toma valores cada vez más grandes, la sucesión también toma valores que aumentan su valor, es decir tiende a infinito.

Tipos de sucesiones

Las sucesiones las clasificaremos únicamente en dos tipos: Las sucesiones que se aproximan a un cierto valor cuando n tiende a infinito (a las cuales se les dirá que tienen límite) y las sucesiones que no se aproximan a un valor cuando n tiende a infinito (a las cuales se les dirá que no tienen límite).

De los ejemplos anteriores, los números 1, 2, 3, 4 y 5 si tienen límite, dado que se están aproximando a un valor fijo, y a dicho valor se le llama el límite de la sucesión y los ejemplos 6 y 7, son sucesiones que no tienen límite, dado que cuando n tiende a infinito no se aproximan a un solo valor. En el ejemplo 6, toma dos valores y en el 7 tiende a infinito.

5.2 Límite de una sucesión

Definición.

El $\lim_{n\to\infty}(S_n) = L$ si y sólo si para toda epsilón (ε) mayor que cero existe A tal que para toda $n > A$ se cumple que $|Sn - l| < \varepsilon$.

Esta definición indica que, si tomamos intervalos tan pequeños como se quiera que contengan a L, dentro de estos intervalos siempre existe un número infinito de términos de la sucesión y fuera de ellos un número finito.

Propiedades del límite de una sucesión

1. $\lim_{n\to\infty}(c) = c$, cuando c es constante.

2. $\lim_{n\to\infty}\left[A_n \pm B_n\right] = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n$

3. $\lim_{n\to\infty} A_n \cdot B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} A_n}{\lim_{n\to\infty} B_n}$

5. $\lim_{n\to\infty}(A_n)^m = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)^m$

6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{A_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} A_n}$

7. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{n}\right)=0$; c =constante.

En la propiedad 7, se indica que el límite de toda constante entre cantidades que tienden a infinito es igual a cero.

Ejemplos.

Evaluar los límites indicados.

1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$ sucesión trabajada anteriormente

2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)=1$ sucesión trabajada anteriormente

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)=$

El proceso de darle valores cada vez más grandes a la n para observar la tendencia de la sucesión, en general resulta bastante tedioso, es por esto que para calcular el límite de sucesiones un método que se utilizará es dividir a cada término de la sucesión entre la n elevada al mayor exponente que aparezca en la sucesión, es decir en la sucesión del ejemplo 3, se dividirá a cada término de la sucesión entre n.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{3n}{n}-\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{3+0}{3-0}=\frac{3}{3}=1$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+7}{5n^2+n-9}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{7}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{9}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}{5+\frac{1}{n}-\frac{9}{n^2}}=\frac{4-0+0}{5+0-0}=\frac{4}{5}$$

5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n+n^2}{2-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{n}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}}{\frac{2}{n^3}-\frac{n^3}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^3}-1}=\frac{0+0+0}{0-1}=0$$

6) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{1+\sqrt{n^2+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{3n}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+3}{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+3}{\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} = \frac{0+3}{0+\sqrt{1+0}} = \frac{3}{1} = 3$$

5.3 Concepto intuitivo del límite de una función

Supongamos que se tiene la función $f(x) = \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)} = 2x+3$, como se puede observar, esta función no está definida en $x=2$, pero le daremos a la x valores que estén cercanos a 2 para observar hacia donde se aproxima la función o para ver el comportamiento de ella.

Como $x \neq 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)} = 2x+3$

Primero le daremos valores a la x que se aproximan a 2 por la izquierda:

x	1	1.5	1.8	1.9	1.99	1.999	$\to 2^-$
$f(x)=2x+3$	5	6	6.6	6.8	6.98	6.998	$\to 7$

Observemos que cuando x tiende a 2 por la izquierda $f(x)$ se aproxima a 7.

Ahora veremos el comportamiento de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 por la derecha.

x	3	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001	$\to 2^+$
$f(x)=2x+3$	9	8	7.4	7.2	7.02	7.002	$\to 7$

Nuevamente se ve que $f(x)$ tiende a 7 cuando x toma valores que se aproximan a 2 por la derecha.

Este análisis nos lleva a la conclusión que el límite de una función no es más que una noción de cercanía. Las ideas, aunque sean sobre el mismo tópico, son distintas y por tanto cada uno de los estudiosos del tema tiene ideas diferentes de cercanía. El concepto de límite unifica todas las ideas al respecto.

Para trabajar el concepto intuitivo o la idea intuitiva del límite de una función, se manejarán las ideas del ejemplo anterior. En el podemos observar que el límite de una función $f(x)$ cuando la x se aproxima a una constante “a”, es el valor al que se acerca cada vez más $f(x)$ cuando x tiende a “a” por la izquierda o por la derecha. La notación que se manejará de aquí en adelante es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Para el ejemplo trabajado, la notación es:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (2x+3) = 7$$

En este ejemplo, observamos que para obtener el límite de la función, fue necesaria la construcción de dos tablas y posteriormente se obtuvo el límite de la función. En general este procedimiento es muy tedioso y en la práctica lo que se acostumbra para evaluar los límites es sustituir a la variable por la cantidad hacia donde tiende en el momento de que no aparezca una indeterminación. Por ejemplo:

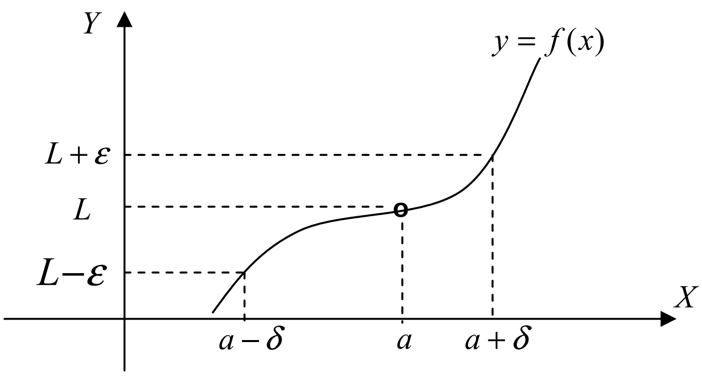
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (2x+3) = 2(2)+3 = 4+3 = 7$$

De igual forma:

- $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(x^2 + 5x + 2\right) = (1)^2 + 5(1) + 2 = 1 + 5 + 2 = 8$
- $\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \left(2x^3 - 3x + 10\right) = 2(-3)^3 - 3(-3) + 10 = -35$

5.4. Definición formal del límite de una función

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.



En esta figura se muestra una parte de la gráfica de $f(x)$ cercana al punto $x = a$. Como $f(x)$ no esta definida necesariamente en "a", no existe un punto en la gráfica con abscisa "a". Observemos que $f(x)$ en el eje Y se localizará entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$ siempre que "x", en el eje X, se localice entre $a - \delta$ y $a + \delta$. Así

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \text{ siempre que } 0<\left|x-a\right|<\delta$$

5.5. Teoremas sobre el límite de una función

1. $\lim\limits_{x\to a}(c)=c$, cuando c es constante.
2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^n$
6. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

5.6. Ejemplos de límites de varios tipos

Evalué los límites siguientes.

Límites directos. Estos se obtienen al sustituir la variable que se esté manejando por la cantidad hacia donde se aproxima.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+3x-5\right)=2(4)+3(2)-5=9$
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2}{1-x}=\dfrac{-1+2}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2x+1}=\dfrac{3-3}{6+1}=\dfrac{0}{7}=0$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{2x^2+1}}=\sqrt{\dfrac{1+2}{2+1}}=\sqrt{\dfrac{3}{3}}=1$

Los límites que se dan a continuación no son directos, ya que si se sustituye directamente la variable por la cantidad hacia donde se aproxima aparece la indeterminación $0/0$ y para evaluar este tipo de límites si éstos existen se utilizan procesos algebraicos como los que se muestran enseguida.

Límites en donde se utiliza la factorización

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 2+2 = 4$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} (x+3) = 3+3 = 6$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{x^2-16} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{(x-4)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-1}{x+4} = \dfrac{-1}{4+4} = -\dfrac{1}{8}$

9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2)(x^2+4)$
$= (2+2)(4+4) = 32$

Límites en donde se utiliza la factorización

$$\boxed{x^2 + ax + b = (x+c)(x+d), \quad en \quad donde \quad c\cdot d = b \quad y \quad c+d = a}$$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+4)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+4}{x-2} = \dfrac{1+4}{1-2} = -5$

11. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-4}{x-2} = \dfrac{-2-4}{-2-2} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)(1+x)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(1+x)}{(x+2)} = \dfrac{-(1+1)}{1+2} = -\dfrac{2}{3}$

13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

Otro tipo de factorizaciónes que son útiles al evaluar límites son:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad y \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

14. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+x+1) = 1+1+1 = 3$

15. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x+3} = \lim_{x\to -3} \dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x^2-3x+9) = 9+9+9 = 27$

16. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x^3+27} = \lim_{x\to -3} \dfrac{(x-4)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)} = \lim_{x\to -3} \dfrac{x-4}{x^2-3x+9} = \dfrac{-3-4}{9+9+9} = -\dfrac{7}{27}$

17. $\lim_{x\to 4} \dfrac{64-x^3}{16-x^2} = \lim_{x\to 4} \dfrac{(4-x)(16+4x+x^2)}{(4-x)(4+x)} = \lim_{x\to 4} \dfrac{16+4x+x^2}{4+x} = \dfrac{16+16+16}{4+4} = 6$

18. $\lim_{x\to 3/2} \sqrt{\dfrac{8x^3-27}{4x^2-9}} = \lim_{x\to 3/2} \sqrt{\dfrac{(2x-3)(4x^2+6x+9)}{(2x-3)(2x+3)}} = \lim_{x\to 3/2} \sqrt{\dfrac{4x^2+6x+9}{2x+3}}$

$$= \sqrt{\frac{4\left(9/4\right)+6\left(3/2\right)+9}{2\left(3/2\right)+3}} = \sqrt{\frac{9+9+9}{3+3}} = \sqrt{\frac{27}{6}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

Ejemplos de límites en donde es útil realizar la división

19. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2+x-4}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+3x+4) = 1+3+4 = 8$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 3x \ \ + 4 \\ \hline x-1 & x^3 + 2x^2 + x - 4 \\ & -x^3 + x^2 \\ \cline{2-2} & 0 \ \ +3x^2 + x \\ & \quad -3x^3 + 3x \\ \cline{2-2} & \quad\ 0 \ + 4x - 4 \\ & \qquad -4x + 4 \\ \cline{2-2} & \qquad\ 0 + 0 \end{array}$$

20. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+3x^2-x-18}{x-2} =$

Para realizar la división utilizaremos la división sintética y ésta se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 3 & -1 & -18 \\
 & & 2 & 10 & 18 \\
\hline
 & 1 & 5 & 9 & 0
\end{array}
\longleftarrow \text{residuo}
$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-x-18}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(x^2+5x+9\right)=4+10+9=23$$

21. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3-7x^2+x+9}{x+1}=$

La división sintética es:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -7 & 1 & 9 \\
 & & -1 & 8 & -9 \\
\hline
 & 1 & -8 & 9 & 0
\end{array}
\longleftarrow \text{residuo}
$$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{x^3-7x^2+x+9}{x+1}=\lim_{x\to -1}\left(x^2-8x+9\right)=1+8+9=18$$

22. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{x-3}}{\dfrac{4x^3-13x^2+4x-3}{x-3}}=$

Las divisiones sintéticas son:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 2 & -5 & -2 & -3 \\
 & & 6 & 3 & 3 \\
\hline
 & 2 & 1 & 1 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 4 & -13 & 4 & -3 \\
 & & 12 & -3 & 3 \\
\hline
 & 4 & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{x-3}}{\dfrac{4x^3-13x^2+4x-3}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1}=$$

$$=\frac{18+3+1}{36-3+1}=\frac{22}{34}=\frac{11}{17}$$

23. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x+2}}{\frac{x^2 + 3x + 2}{x+2}} =$

Las divisiones sintéticas son:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & -1 & 10 \\ & & -2 & 6 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 3 & 2 \\ & & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore \lim_{x\to -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -2} \frac{\frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x+2}}{\frac{x^2 + 3x + 2}{x+2}} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 3x + 5}{x+1} =$$

$$= \frac{4 + 6 + 5}{-2 + 1} = \frac{15}{-1} = -15$$

Ejemplos de límites en donde se utiliza la racionalización

24. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{3}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + 3 - 3}{x\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

25. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

26. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3x+3h-5}-\sqrt{3x-5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3x+3h-5}-\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x+3h-5}+\sqrt{3x-5}\right)}{h\left(\sqrt{3x+3h-5}+\sqrt{3x-5}\right)}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3x+3h-5}\right)^2-\left(\sqrt{3x-5}\right)^2}{h\left(\sqrt{3x+3h-5}+\sqrt{3x-5}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{3x+3h-5-3x+5}{h\left(\sqrt{3x+3h-5}+\sqrt{3x-5}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(\sqrt{3x+3h-5}+\sqrt{3x-5}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{3x+3h-5}+\sqrt{3x-5}\right)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x-5}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$$

27. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1\right]\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+1-1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{(x+2-2)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{1+1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

28. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{9x+5}}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{9x+5}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{9x+5}\right)\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{9x+5}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt{4x+3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right]\left(\sqrt{5}+\sqrt{9x+5}\right)}{\left[\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{9x+5}\right)^2\right]\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(4x+3-3)\left(\sqrt{5}+\sqrt{9x+5}\right)}{(5-9x-5)\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4x)\left(\sqrt{5}+\sqrt{9x+5}\right)}{(-9x)\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{9x+5}\right)}{-9\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)}{-9\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(2\sqrt{5}\right)}{-9\left(2\sqrt{3}\right)}$$

$$=-\frac{4\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}$$

Ejemplos de límites en donde aparecen las raíces cúbicas

29. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=$

para evaluar este tipo de límites, utilizaremos la factorización

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

en donde $a-b$ representa a la resta en donde aparecen las raíces cúbicas; es decir: $a-b=\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}=(x+h)^{1/3}-x^{1/3}$, luego $a=(x+h)^{1/3}$ y $b=x^{1/3}$. Además con el fin de eliminar las raíces cúbicas, se multiplica tanto el numerador como denominador por $\left(a^2+ab+b^2\right)$, dicho proceso se realiza a continuación:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^{1/3}-x^{1/3}\right]\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}{h\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^{1/3}\right]^3-\left[x^{1/3}\right]^3}{h\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left[(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}$$

$$=\frac{1}{(x)^{2/3}+(x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{x^{2/3}+x^{2/3}+x^{2/3}}=\frac{1}{3x^{2/3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=$

Al utilizar el procedimiento anterior $a=(x+1)^{1/3}$ y $b=1$. Nuevamente se multiplica tanto el numerador como denominador por a^2+ab+b^2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(x+1)^{1/3}-1\right]\left[(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right]}{x\left[(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(x+1)^{1/3}\right]^3-[1]^3}{x\left[(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left[(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left[(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left[(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1\right]}$$

$$=\frac{1}{(1)^{2/3}+(1)^{1/3}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}$$

31. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{h}=$

Para este ejemplo $a=(x+h)^{2/3}$ y $b=x^{2/3}$. Nuevamente se multiplica tanto el numerador como denominador por a^2+ab+b^2.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^{2/3}-x^{2/3}\right]\left[(x+h)^{4/3}+(x+h)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}\right]}{h\left[(x+h)^{4/3}+(x+h)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^{2/3}\right]^3-\left[x^{2/3}\right]^3}{h\left[(x+h)^{4/3}+(x+h)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h\left[(x+h)^{4/3}+(x+h)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h\left[(x+h)^{4/3}+(x+h)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h\left[(x+h)^{4/3}+(x+h)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h\left[(x+h)^{4/3}+(x+h)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{(x+h)^{4/3}+(x+h)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}}$$

$$= \frac{2x}{x^{4/3}+x^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}} = \frac{2x}{3x^{4/3}} = \frac{2}{3x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Ejemplos de límites en donde se realizan cambios de variable

Este tipo de límites se sugiere utilizarlos sobre todo cuando haya radicales de diferentes grados.

32. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} =$

Si x=u^6 $\Rightarrow$ $\sqrt{x} = \sqrt{u^6} = u^3$ y $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{u^6} = u^2$. Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{u\to 0} \frac{u^3-1}{u^2-1} = \lim_{u\to 0} \frac{(u-1)(u^2+u+1)}{(u-1)(u+1)} = \lim_{u\to 0} \frac{u^2+u+1}{u+1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} =$

Si x=u^4 $\Rightarrow$ $\sqrt{x} = \sqrt{u^4} = u^2$ y $\sqrt[4]{x} = u$. Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{u\to 0} \frac{u^2-1}{u-1} = \lim_{u\to 0} \frac{(u-1)(u+1)}{u-1} = \lim_{u\to 0} (u+1) = 1+1 = 2$$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1} =$

Si x=u^6 $\Rightarrow$ $\sqrt{x} = \sqrt{u^6} = u^3$ y $\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{u^6} = u$. Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1} = \lim_{u\to 0} \frac{u^3-1}{u-1} = \lim_{u\to 0} \frac{(u-1)(u^2+u+1)}{u-1} = \lim_{u\to 0} \left(u^2+u+1\right) = 1+1+1 = 3$$

Ejemplos de límites en donde se realizan las operaciones indicadas

34. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+1\right)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(x+2\right)=0+2=2$$

35. $$\lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(2x+h\right)=2x+0=2x$$

36. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+2\right)^3-8}{(x+2)^2-4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x+8-8}{x^2+4x+4-4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x}{x^2+4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+6x+12)}{x(x+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6x+12}{x+4}=\frac{0+0+12}{0+4}=\frac{12}{4}=3$$

37. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+2\right)^{-1}-2^{-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2-x-2}{2(x+2)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{2(x+2)}}{\frac{x}{1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2(x+2)x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(x+2)}=\frac{-1}{2(0+2)}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$

38. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+h\right)^{-2}-h^{-2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{h^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{h^2-(x+h)^2}{h^2(x+h)^2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{h^2-x^2-2xh-h^2}{h^2(x+h)^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2-2xh}{h^2(x+h)^2}}{\frac{x}{1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-2xh}{h^2(x+h)^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(-x-2h)}{h^2(x+h)^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-2h}{h^2(x+h)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-0-2h}{h^2(0+h^2)}=\frac{-2h}{h^4}=\frac{-2}{h^3}$$

5.7. Límites unilaterales

Si consideramos la función $f(x)=\sqrt{x}$, tiene como dominio el intervalo $[0,+\infty)$. Por consiguiente el $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$, no existe debido a que la "x" no puede tomar valores que se aproximen a cero por la izquierda. Sin embargo la "x" si puede tomar valores que se aproximen a cero por la derecha. Este ejemplo ilustra la siguiente definición.

Definición. El límite unilateral por la derecha de $f(x)$ cuando "x" tiende al valor "a" por la derecha es igual a "L" y escribimos

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

Si para cualquier $\varepsilon>0$, tan pequeño como se quiera existe una $\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $0<x-a<\delta$.

Al utilizar esta definición se obtiene que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

Observemos que en la definición dada se supone que la función $f(x)$, está definida en el intervalo (a,c), para valores de $c>a$.

Definición. El límite unilateral por la izquierda de $f(x)$ cuando "x" tiende al valor "a" por la izquierda es igual a "L" y escribimos

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

Si para cualquier $\varepsilon>0$, tan pequeño como se quiera existe una $\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $0<a-x<\delta$.

En esta definición se supone que la función $f(x)$, está definida en el intervalo (d,a), para valores de $d<a$.

Ahora para ver la relación que existe entre los límites unilaterales $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ con el $\lim_{x\to a} f(x)$, se da el teorema siguiente.

Teorema. El $\lim_{x\to a} f(x)=L$ si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ = $\lim_{x\to a^+} f(x)$ = L.

A partir de este teorema se obtiene que si $\lim_{x\to a^-} f(x)\neq\lim_{x\to a^+} f(x)$, se obtiene que $\lim_{x\to a} f(x)$ no eixste.

Ejemplos.

Obtenga los límites indicados en cada caso y trace la gráfica.

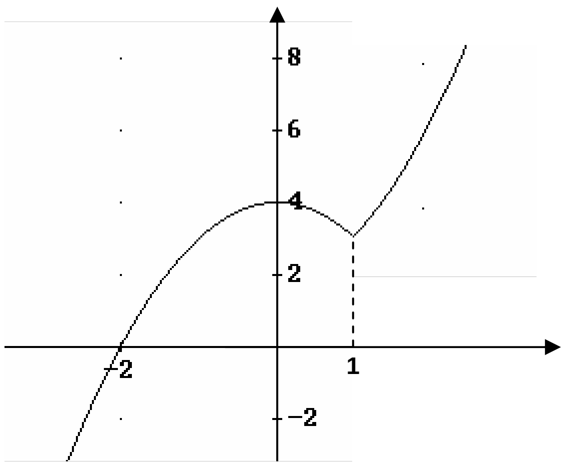
1. $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & si \quad x<1\\ \\ 2+x^2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$. Obtenga: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Solución:

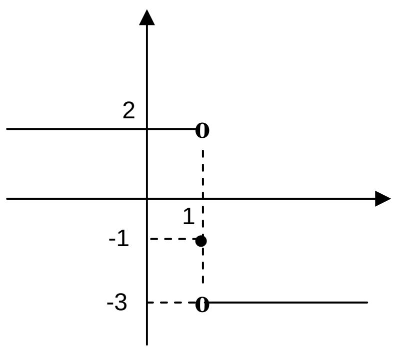
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(4-x^2\right)=4-1=3.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(2+x^2\right)=2+1=3.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.



2. $f(x)=\begin{cases}2 & si \quad x<1\\ -1 & si \quad x=1\\ -3 & si \quad x>1\end{cases}$. Obtenga: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.



Solución:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-3.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

3. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$. Obtenga: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

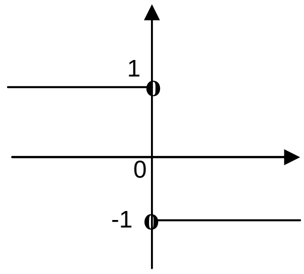
Esta función se expresa como $f(x)=\begin{cases}-1 & si \quad x>0\\ \\ 1 & si \quad x>0\end{cases}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 .$$

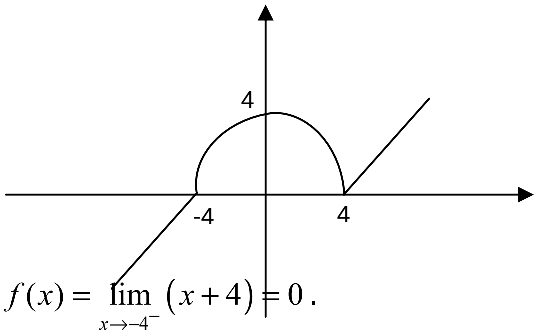
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 .$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.



4. $f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x < -4 \\ \sqrt{16-x^2} & si \quad -4 < x < 4 \\ x-4 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

Obtenga: $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.



$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} (x+4) = 0 .$$

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} \sqrt{16-x^2} = 0 .$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to -4} f(x) = 0 .$$

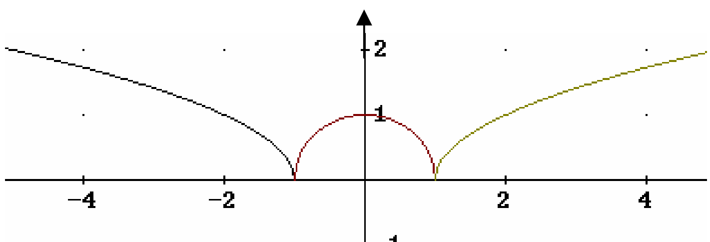
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \sqrt{16-x^2} = 0 .$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x-4) = 0 .$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 4} f(x) = 0 .$$

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-1-x} & si \quad x < -1 \\ \sqrt{1-x^2} & si \quad -1 < x < 1 \\ \sqrt{x+1} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

Obtenga: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.



$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \sqrt{-1-x} = 0 .$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 .$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to -1} f(x) = 0 .$$

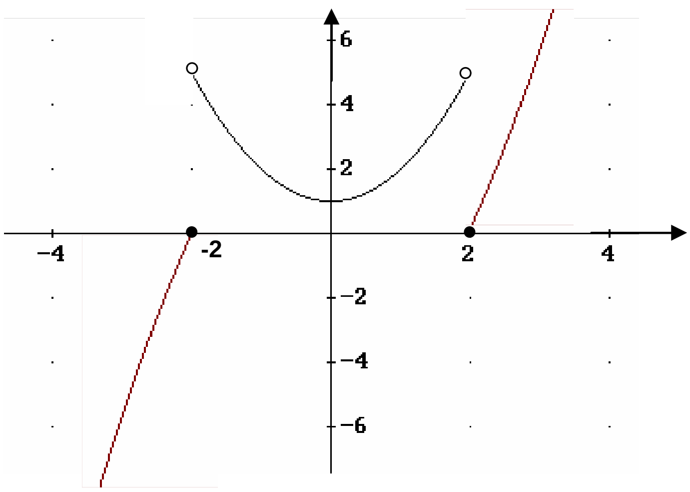
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 .$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0 .$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 0 .$$

$$f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & si \quad x \le -2 \\ x^2+1 & si \quad -2 < x < 2 \\ x^2-4 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Obtenga: $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$.



Observemos que según la gráfica los límites unilaterales son diferentes, esto indica que los límites $\lim_{x\to -2} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existen. Estos resultados se comprueban en seguida.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \left(4-x^2\right) = 0 .$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\left(x^2+1\right) = 5 .$$

$\therefore$ $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(x^2+1\right) = 5 .$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(x^2-4\right) = 0 .$$

$\therefore$ $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

5.8. Límites infinitos

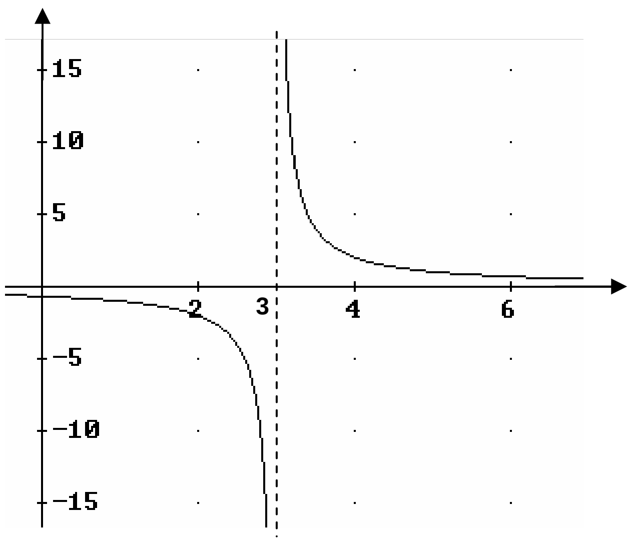
Estos son límites unilaterales y se caracterizan porque cuando la variable tiende a algunos valores, las funciones tienden a infinito o a menos infinito, como se ilustra en los ejemplos que se dan a continuación.

Ejemplos.

Para cada función que se indica, trace la gráfica y en base a ella obtenga los límites indicados.

1. Si $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$. Obtenga el $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x)$.

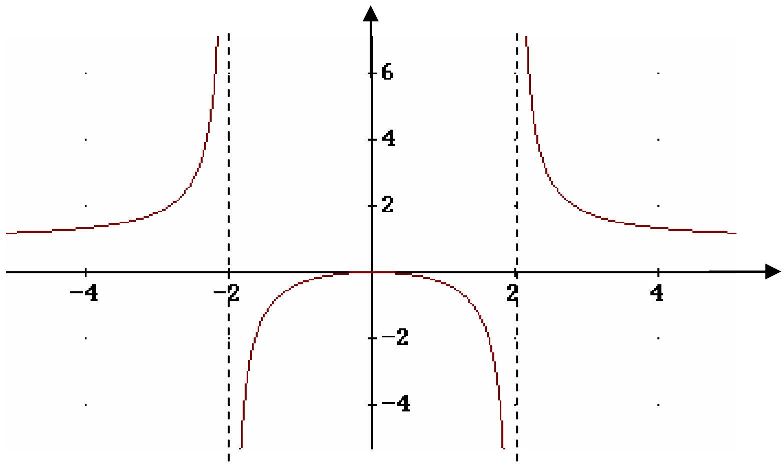
   La gráfica es la siguiente:



$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$$

2. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$. Obtenga $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

La gráfica de la función indicada es:



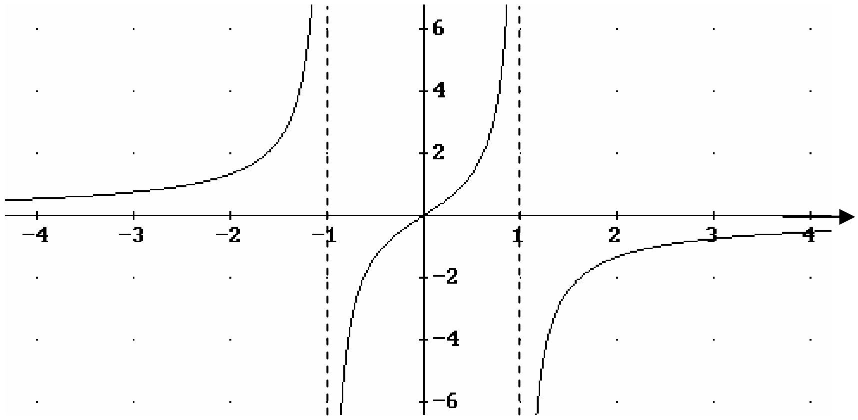
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = +\infty$$

1. Si $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$. Obtenga $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.



$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$$

5.9. Limites al infinito

Recordemos que cuando calculamos el límite de algunas sucesiones, el límite de cualquier constante entre cantidades que tienden a $+\infty$ es igual a cero. Además se utilizó el procedimiento de dividir a cada miembro del cociente entre la n elevada al máximo potencia. Este mismo procedimiento será utilizado para evaluar el límite de funciones cuando la $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{3x-8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{8}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{5}{x}}{3-\frac{8}{x}} = \dfrac{2+0}{3-0} = \dfrac{2}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x+5}{5x^2-9} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{5-\frac{9}{x^2}} = \dfrac{2-0+0}{5-0} = \dfrac{2}{5}$

3. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x^2+1}{7x^3+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{7+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{3-0+0}{7+0-0}=\frac{2}{7}$$

4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-7x+3}{4x^3+8x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{7x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{8x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{4+\frac{8}{x^2}}=\frac{0-0+0}{4+0}=0$$

5. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0-0}{1+0}=0$$

6. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x}{2x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{2-0}{0+0}=\frac{2}{0}=\infty$$

también podemos decir que el límite no está definido o es indefinido.

7. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{3+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{3}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{\frac{3}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{\frac{3}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{1+0}{0+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1}{1}=1$$

8.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{3+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{-x}+\frac{4}{-x}}{\frac{3}{-x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{4}{x}}{-\frac{3}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{4}{x}}{-\frac{3}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{-1+0}{0+\sqrt{1-0}}=\frac{-1}{\sqrt{1}}=\frac{-1}{1}=-1$$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}+4x}{6x+\sqrt{9x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{x}+\dfrac{4x}{x}}{\dfrac{6x}{x}+\dfrac{\sqrt{9x^2-1}}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}+4}{6+\sqrt{\dfrac{9x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}+4}{6+\sqrt{9-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{\sqrt{4+0}+4}{6+\sqrt{9-0}}=\frac{\sqrt{4}+4}{6+\sqrt{9}}=\frac{2+4}{6+3}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}+4x}{6x+\sqrt{9x^2-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{-x}+\dfrac{4x}{-x}}{\dfrac{6x}{-x}+\dfrac{\sqrt{9x^2-1}}{-x}}=\lim\limits_{x\to\}-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}-4}{-6+\sqrt{\dfrac{9x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}-4}{-6+\sqrt{9-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{\sqrt{4+0}-4}{-6+\sqrt{9-0}}=\frac{\sqrt{4}-4}{-6+\sqrt{9}}=\frac{2-4}{-6+3}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3-x}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}=0$$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-1-x^2+2x}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$= \frac{3-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0}} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

13. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right) =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-1-x^2+2x}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x}{-x}-\frac{1}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{-x}+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$= \frac{-3+0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0}} = \frac{-3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{3}{2}$$

a

a

a

5.10. Asíntotas horizontales y verticales

En las secciones 5.8 y 5.9 fueron trabajados los límites infinitos y los límites al infinito respectivamente. Dichos límites serán de utilidad para definir las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales.

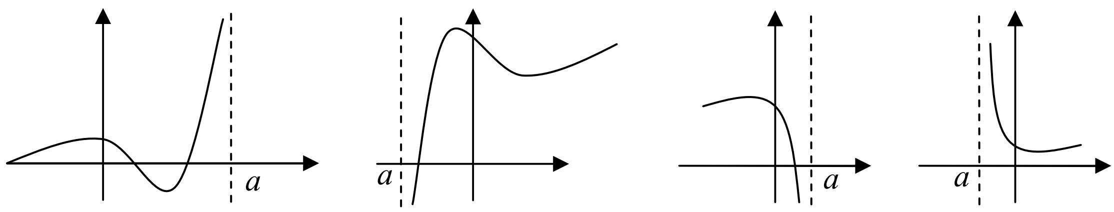
Definición 1. Una recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si por lo menos una de las siguientes afirmaciones se cumple:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Definición 2. Una recta $y = A$ se llama asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si se cumplen cualquiera de las dos condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad o \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

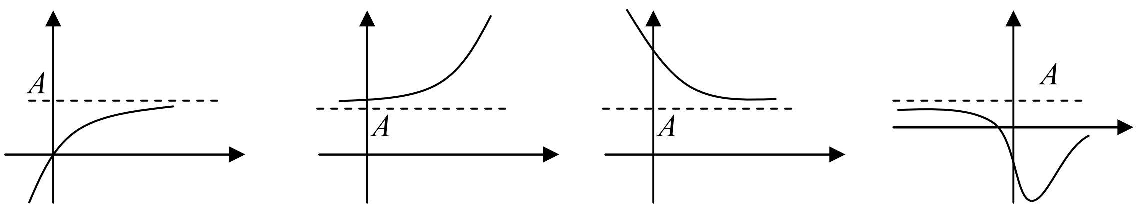
A continuación se dan ejemplos de funciones en los que las rectas $x = a$ son asíntotas verticales:



$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

De igual forma enseguida se dan ejemplos de funciones en donde $y = A$ son asíntotas horizontales:



$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$

Ejemplos.

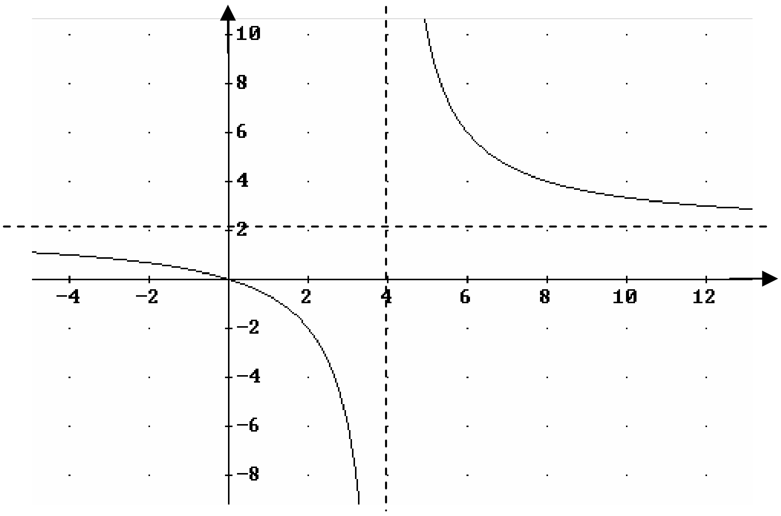
Para cada función que se da, encuentre las asíntotas verticales, las asíntotas horizontales y trace la gráfica.

1) $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$

Como el $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x}{x-4}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x}{x-4}=\infty$. Se obtiene que $x=4$ es una asíntota vertical.

Además el $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{x-4}=2$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{x-4}=2$. Luego $y=2$ es una asíntota horizontal.

La gráfica se da a continuación:



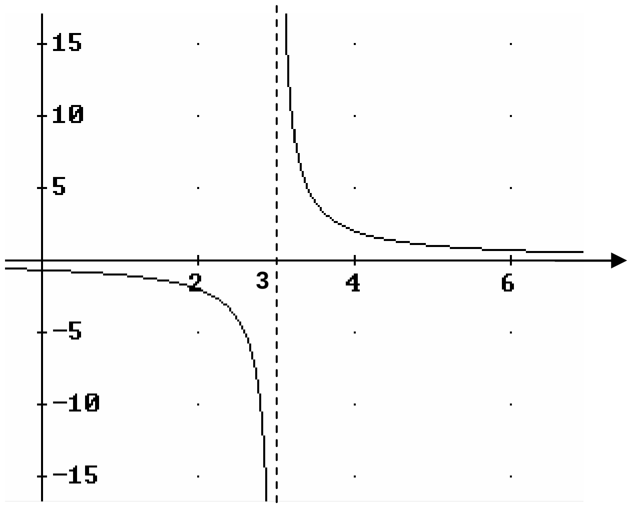
2. Si $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$.

Como $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2}{x-3}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2}{x-3}=+\infty$

Luego $x=3$ es una asíntota vertical.

El $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2}{x-3}=0$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x-3}=0$. Luego $y=0$ es una asíntota horizontal.

La gráfica es la siguiente:



2. Si $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty$$

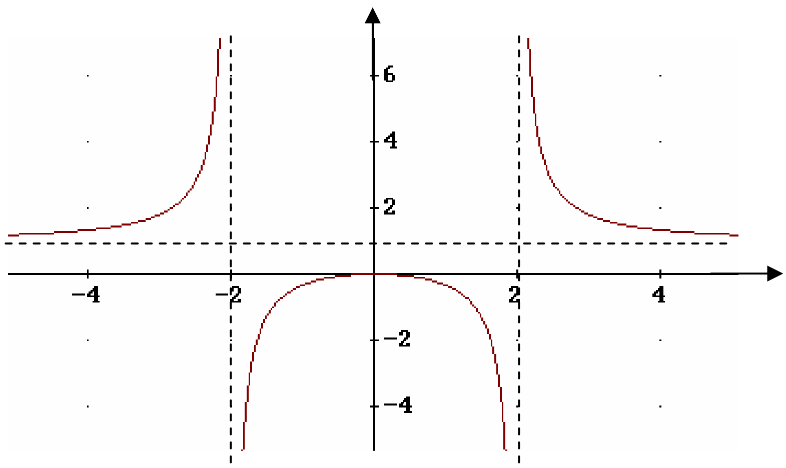
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty$$

Luego $x=-2 \quad y \quad x=2$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=1 \quad y \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=1$$

Luego $y=1$ es una asíntota horizontal.

La gráfica de la función indicada es



2. Si $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x}{1-x^2}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{2x}{1-x^2}=-\infty$$

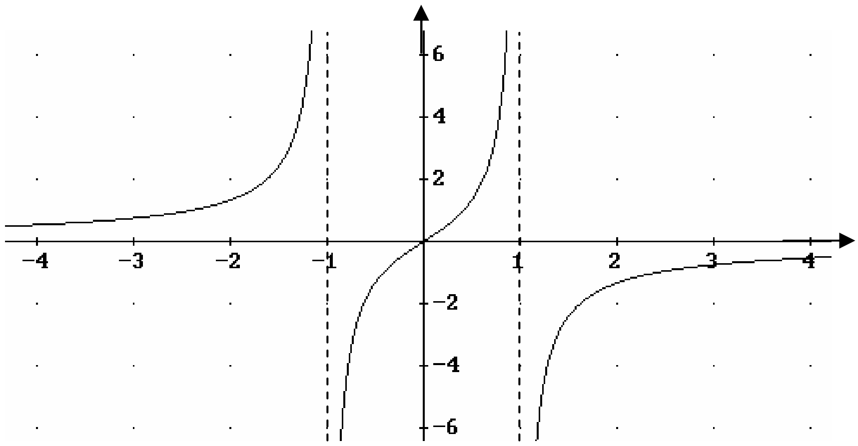
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$$

Luego $x=-1 \quad y \quad x=1$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0 \quad y \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$$

Luego $y=0$ es una asíntota horizontal.

La gráfica es:



3. Si $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

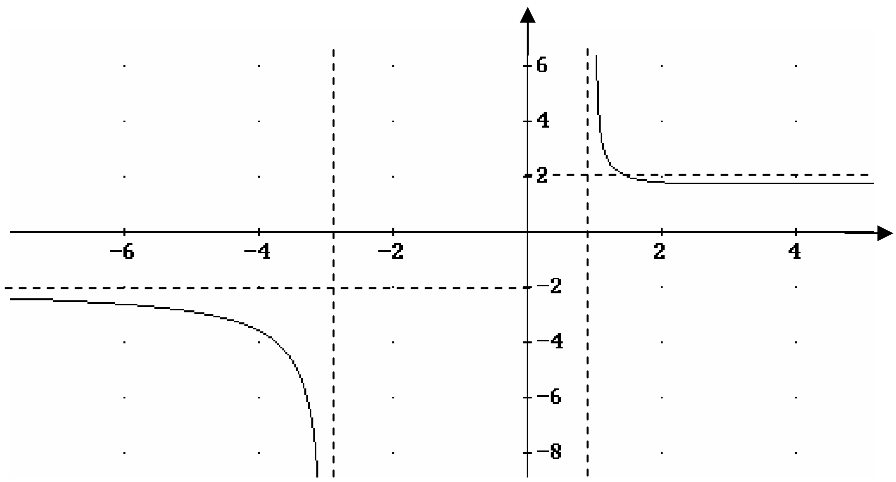
$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x-3}} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \infty$$

Luego $x=-3 \quad y \quad x=1$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x-3}} = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x-3}} = 2$$

Luego $y=2 \quad y \quad y=-2$ son asíntotas horizontales.

La gráfica es:



5.11. Ejercicios

I) Evaluar los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2x-4}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x-6}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8-2x}{x^2-16}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x-12}$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x^2-100}{10-2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-2x^2}{3x-3}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{3x-6}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}$

12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4}$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^2+x-2}$

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$

16. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

17. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-8}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{3x+9}$

20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}$

21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{64-x^3}{32-2x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5-5x}{1-x^3}$

23. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3+2}{x+1}$

24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{2x-4}$

25. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{x^3-27}$

26. $\lim\limits_{x\to 3/2} \sqrt{\dfrac{8x^3-27}{8x^2-18}}$

27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2+x-4}{x-1}$

28. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+3x^2-x-18}{x-2}$

29. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-7x^2+x+9}{x+1}$

30. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3+3x^2-4x-1}{x-1}$

31. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x^3-4x^2+2x+11}{x+1}$

32. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

33. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

34. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-2x^3+x^2-3}{x^3+x+2}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

36. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

37. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h-5}-\sqrt{x-5}}{h}$

38. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{x-a}$

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{4+x}}$

42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{3+x}}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{7+2x}}$

44. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

45. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

46. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{2-\sqrt[3]{x}}{8-x}$

47. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{(x+h)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{h}$

48. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+3)^2-9}{x}$

50. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(a+2h)^2-a^2}{h}$

51. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^3-8}{(x+2)^2-4}$

52. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^3-27}{(3+h)^2-9}$

53. $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4} \right)$

54. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{16}}$

55. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^{-1}-2^{-1}}{x}$

56. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h+1)^{-1}-1}{h}$

57. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{-2}-x^{-2}}{h}$

58. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{-3}-x^{-3}}{h}$

II) Para cada función que se da, obtenga los límites unilaterales que se indican:

1) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & si \quad x<1 \\ 2+x^2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x), \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to 1} f(x).$

2) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x<1 \\ 1-x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x), \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to 1} f(x).$

3) $f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x<2 \\ x^2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 2^-} f(x), \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to 2} f(x).$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} & si \quad x\leq 3 \\ \dfrac{12-2x}{3} & si \quad x>1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 3^-} f(x), \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to 3} f(x).$

5) $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & si \quad x\leq 1 \\ x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x), \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to 1} f(x).$

6) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-5 & si \quad x<2 \\ \\ x^2-1 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 2^-} f(x), \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to 2} f(x).$

7) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+6 & si \quad x<2 \\ \\ -x^2+4x-2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 2} f(x).$

8) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & si \quad x<1 \\ \\ 3-x^2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 1} f(x).$

9) $f(x)=\begin{cases} 4x+2 & si \quad x<-2 \\ \\ \sqrt{9+x^2} & si \quad x\geq -2 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to -2} f(x).$

10) $f(x)=\frac{|x|}{x}. \quad Obtenga: \quad \lim_{x\to 0} f(x).$

11) $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}. \quad Obtenga: \quad \lim_{x\to 2} f(x).$

12) Dada la función $f(x)$ obtenga el valor de "p" tal que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista

$$f(x)=\begin{cases} 5x-1 & si \quad x\leq 2 \\ \\ x^2+p & si \quad x>2 \end{cases}$$

13) $f(x)=\begin{cases} -3 & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ 3 & si \quad x>0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x).$

14) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & si \quad x\leq 2 \\ 2x+1 & si \quad 2<x<4 \\ 5x-1 & si \quad x\geq 4 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 2} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to 4} f(x).$

15) $f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x<-1 \\ \sqrt{10-x^2} & si \quad -1\leq x\leq 1 \\ 3x & si \quad x>1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to -1} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to 1} f(x).$

16) $f(x)=\begin{cases} 4+x & si \quad x<-4 \\ \sqrt{16-x^2} & si \quad -4\le x\le 4 \\ x-4 & si \quad x>4 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to -4} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 4} f(x).$

III) En cada función que se da, encuentre los límites infinitos que se indican:

1. $f(x)=\dfrac{3x}{x-7}$ $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 7^+} f(x).$

2. $f(x)=\dfrac{5x}{8+2x}$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x).$

3. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2-16}$ $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x), \quad \lim\limits_{x\to -4^+} f(x), \quad \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 4^+} f(x).$

4. $f(x)=\dfrac{6x}{2-2x^2}$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x), \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x), \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x).$

5. $f(x)=\dfrac{2x^2}{2x^2-8}$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x), \quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x), \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x).$

6. $f(x)=\dfrac{x^2}{16-x^2}$ $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x), \quad \lim\limits_{x\to -4^+} f(x), \quad \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 4^+} f(x),$

7. $f(x)=\dfrac{3x^2}{3-3x^2}$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x), \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x), \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x).$

8. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-6}$ $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x), \quad \lim\limits_{x\to -3^+} f(x), \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x).$

9. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-12}$ $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x), \quad \lim\limits_{x\to -4^+} f(x), \quad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x).$

10. $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x-6}}$ $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x).$

11. $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+x-12}}$ $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x).$

12. $f(x)=\dfrac{-5x}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x).$

IV) Obtenga los límites al infinito que se dan:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+7}{5x+4}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+5}{6x^2+4x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7}{6x^3+x^2+5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-7}{5x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2+6x-8}{x-9}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{5x+3}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{9x^2+8}+x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-5}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2-3x-10}\right)$

V) Obtenga las asíntotas horizontales y verticales para cada función y trace la gráfica.

1. $f(x)=\dfrac{3x}{x-7}$

2. $f(x)=\dfrac{5x}{8+2x}$

3. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2-16}$

4. $f(x)=\dfrac{6x}{2-2x^2}$

5. $f(x)=\dfrac{2x^2}{2x^2-8}$

6. $f(x)=\dfrac{x^2}{16-x^2}$

7. $f(x)=\dfrac{3x^2}{3-3x^2}$

8. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-6}$

9. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-12}$

10. $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x-6}}$

11. $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+x-12}}$

12. $f(x)=\dfrac{-5x}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

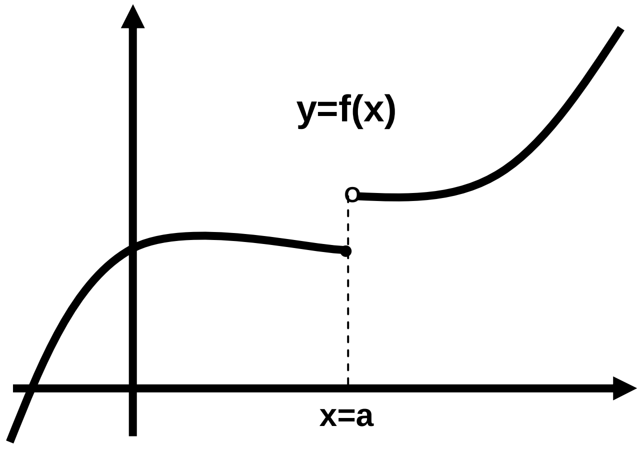
UNIDAD 6

CONTINUIDAD

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno será capaz de:

- ♦ Analizar cuando una función es continua o discontinua.
- ♦ Aplicar la definición de continuidad puntual y en un intervalo, así como las propiedades de continuidad en la solución de problemas.
- ♦ Analizar los diferentes tipos de discontinuidad.
- ♦ Identificar las funciones que presentan discontinuidades removibles o no removibles.

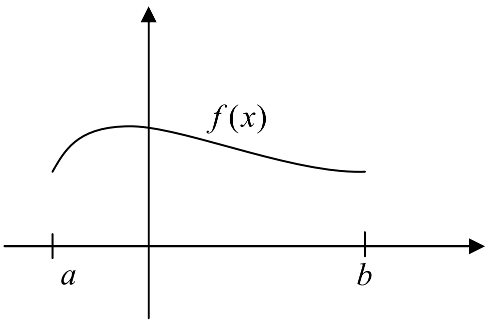


6) CONTINUIDAD

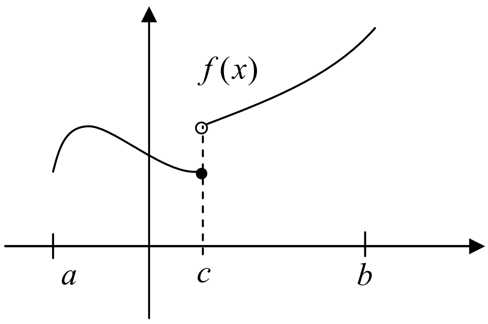
6.1. Idea intuitiva de continuidad y discontinuidad

Intuitivamente se dice que una función es continua en un cierto intervalo, si en dicho intervalo su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz. Se dice que es discontinua o que no es continua en un punto o más puntos de este intervalo si en dichos puntos es necesario levantar el lápiz para dibujar la gráfica de la función $f(x)$.

A continuación se dan las gráficas de dos funciones, en las que la primera es continua en el intervalo (a,b), esto es debido a que la gráfica de la función $f(x)$ se dibujó sin levantar el lápiz en todo el intervalo mencionado y la segunda función no es continua o discontinua en el punto $x=c$ del intervalo (a,b).



Función continua



Función discontinua

6.2. Definición de continuidad puntual

Una función $f(x)$ es continua en $x=a$ si y sólo si, se cumplen las tres condiciones siguientes:

a) $f(a)$ existe

b) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe

c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

En el caso de que al menos una de estas propiedades no se cumpla, se dice que la función $f(x)$ no es continua o es discontinua en $x = a$. A continuación se dan algunos ejemplos en los que se ilustra el concepto de continuidad puntual.

Ejemplos.

Verifique si las funciones que se dan son continuas o no en el punto indicado.

1) $f(x) = 3x^2 + 5x - 10 \quad en \quad x = 1$

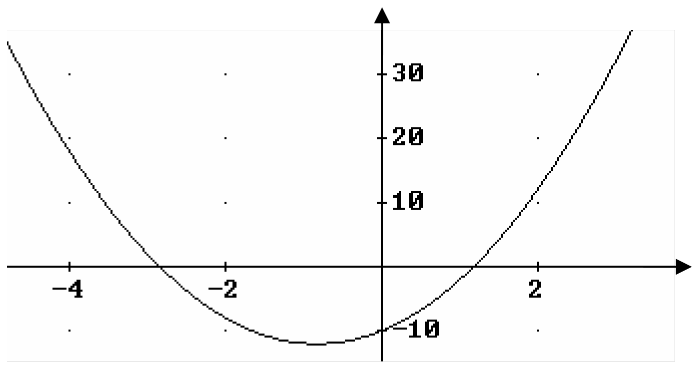
Verifiquemos cada una de las propiedades:

a) $f(a) = f(1) = 3(1)^2 + 5(1) - 10 = -2$ Por lo tanto, si existe.

b) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(3x^2 + 5x - 10\right) = -2$ Por lo tanto, si existe.

c) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Como se cumplen las tres propiedades, concluimos que la función si es continua en $x = 1$. Geométricamente significa que la grafica de esta función se puede dibujar sin levantar el lápiz en el punto $x = 1$. La gráfica es la siguiente:



2) $f(x) = \dfrac{3}{x-2} \quad en \quad x = 3$

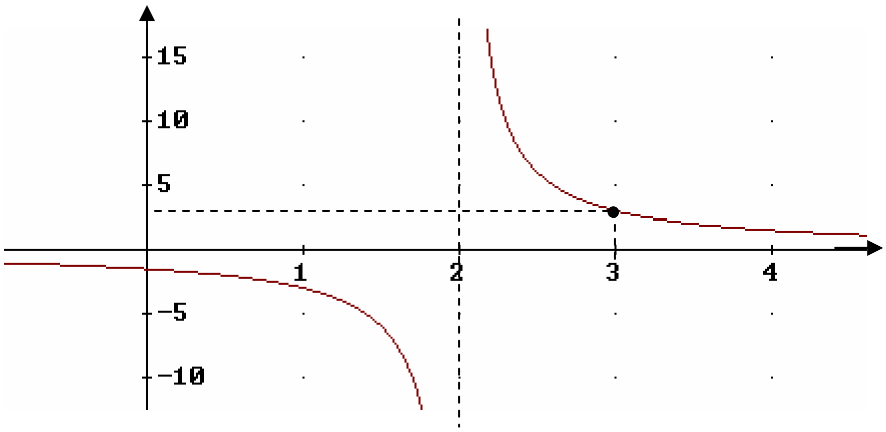
Respuesta:

a) $f(a) = f(3) = \dfrac{3}{3-2} = 3$ Por lo tanto, si existe.

b) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{3}{x-2} = 3$ Por lo tanto, si existe.

c) $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

En este ejemplo también se cumplen las tres propiedades, luego la función si es continua en $x = 3$. En la gráfica que se da a continuación, se ilustra tal afirmación.



3) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ en $x = 2$

Respuesta:

a) $f(a) = f(3) = \dfrac{3}{3-3} = \dfrac{3}{0}$ Por lo tanto, no existe.

Dado que la primera condición no se cumplió, se dice que la función es discontinua en $x = 2$. Por tratarse de la función del ejemplo 2, en dicha gráfica se observa que efectivamente, para dibujar la gráfica en el punto $x = 2$ es necesario levantar el lápiz.

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} & si \quad x \neq 2 \\ \\ 1 & si \quad x = 2 \end{cases}$ ¿Será continua en $x = 2$?

Respuesta:

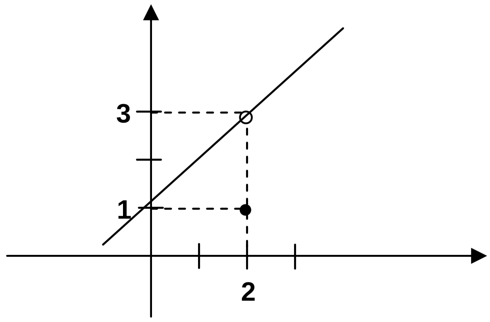
a) $f(a) = f(2) = 1$

b) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+1) = 3$

c) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

Como la propiedad tres no se cumplió, la función es discontinua en $x = 2$.

Una gráfica ilustrativa es:



Si analizamos la gráfica nos damos cuenta que el hueco que provoca la discontinuidad en $x = 2$ sobre la recta, es porque en este punto la función fue definida como $f(2) = 1$, pero si subimos el punto aislado al lugar donde aparece el hueco, es decir si $f(2) = 3$, la función se hace continua en $x = 2$. Luego la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & si \quad x \neq 2 \\ \\ 3 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

es continua en $x = 2$.

5) Para cada una de las funciones que se dan, obtenga el valor de W de forma tal que la función $f(x)$ sea continua en el ponto indicado.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & si \quad x \neq -3 \\ \\ W & si \quad x = -3 \end{cases}$ en $x = -3$.

Considerando el ejemplo 4, nos damos cuenta que para que la función sea continua en $x = -3$, es necesario que W se iguale con el límite de la función cuando la variable tiende a menos tres, es decir:

$$W = \lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \to -3} (x - 3) = -3 - 3 = -6$$

Por lo tanto la función es continua en $x = -3$ si $W = -6$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & si \quad x \neq 1 \\ \\ W & si \quad x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

Nuevamente para asegurar que la función sea continua en $x = 1$, se iguala W con el límite de la función cuando la variable tiende a uno, es decir:

$$W = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Por lo tanto la función es continua en $x = 1$ si $W = 3$.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3}}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \\ W & si \quad x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

W se iguala con el límite de la función cuando la variable tiende a cero, es decir:

$$W = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{x\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3}\right)} == \lim_{x \to 0} \frac{2x + 3 - 3}{x\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3}\right)}$$

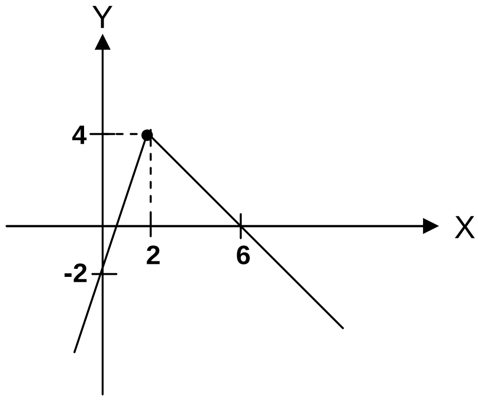
$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto la función es continua en $x = 0$ si $W = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6) Para cada función que se indica, trace la gráfica y verifique si es o no continua en el punto o los puntos que se dan:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & si \quad x<2 \\ 6-x & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ en $x=2$.

La gráfica es la siguiente:



Para verificar si la función es continua en $x=2$, se verificarán las tres condiciones que se deben cumplir según la definición.

i) $f(a)=f(2)=3(2)-2=4$ Por lo tanto, si existe.

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Ya sabemos que para que exista el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ es necesario que los límites unilaterales sean iguales.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x-2)=4$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(6-x)=4$

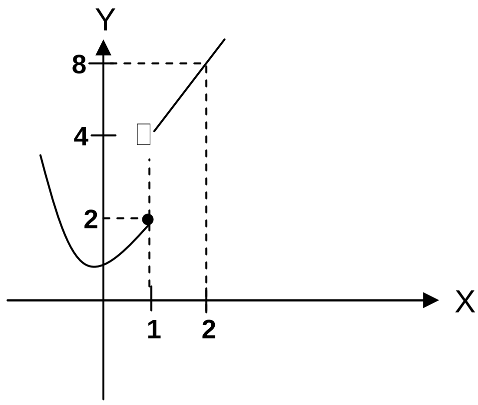
Luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si existe y es igual a 4.

iii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Por lo tanto la función si es continua en $x=2$.

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x\leq 1 \\ 2x+2 & si \quad x>1 \end{cases}$ en $x=1$.

La gráfica es la siguiente:



Se utilizará la definición para verificar si la función es continua o no en el punto indicado.

i) $f(a)=f(1)=(1)^2+1=2$ Por lo tanto, si existe.

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

A continuación se evalúan los límites unilaterales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2 \qquad \text{y}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[2(1)+2\right]=4$$

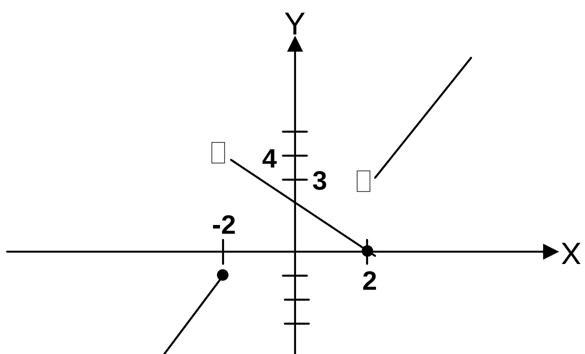
Como los límites son diferentes se obtiene que el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

Por lo tanto la función es discontinua en $x=1$.

Observemos que en ejemplo 6.a la función fue continua en $x=2$ y esto ocurrió dado que los límites unilaterales fueron iguales y en el ejemplo 6.b la función no fue continua y esto sucedió porque los límites unilaterales fueron diferentes. En los ejemplos que se dan enseguida para verificar si la función es o no continua, se verificará que ocurre directamente con los límites unilaterales.

c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\le -2 \\ 2-x & si \quad -2<x\le 2 \\ 2x-1 & si \quad x>2 \end{cases}$ en $x=-2 \quad y \quad x=2$.

La gráfica es:



Para verificar si es continua en $x=-2$, se evaluarán los límites unilaterales y si estos son iguales, concluimos que la función si es continua en $x=-2$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \left(x+1\right) = -1$$
$$\lim_{x\to 1-2} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \left(2-x\right) = 4$$

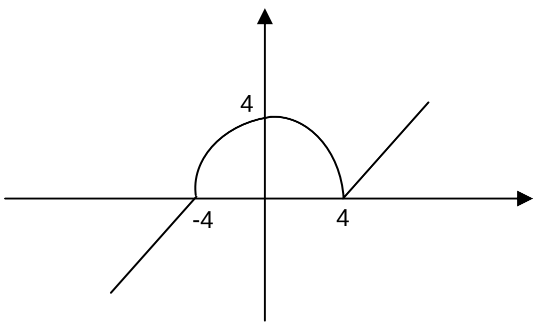
Como los límites son diferentes se obtiene que la función $f(x)$ no es continua en $x=-2$.

De igual forma para verificar si es continua en $x=2$, se evalúan los límites unilaterales.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(2-x\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(2x-1\right) = 3$$

Dado que los límites son diferentes se obtiene que la función $f(x)$ no es continua en $x=2$.

d) $f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x<-4 \\ \sqrt{16-x^2} & si \quad -4\le x<4 \\ x-4 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$ en $x=-4 \quad y \quad x=4$.



Para que la función sea continua en $x=-4$, es necesario que:

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^+} f(x).$$

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} x+4 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} \sqrt{16-x^2} = 0 .$$

Por lo tanta la función si es continua en $x = -4$.

También la función es continua en $x = 4$ si:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \sqrt{16-x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x-4) = 0 .$$

Por lo tanta la función si es continua en $x = 4$.

6.3. Tipos de discontinuidades

Existen dos tipos de discontinuidades, las discontinuidades removibles o relativas
y las discontinuidades no removibles o absolutas. En las discontinuidades removibles es posible evitar la discontinuidad y en la no removibles no se puede evitarla.

Definición. Se dice que la función $f(x)$ tiene una **discontinuidad removible** en $x = a$ si se cumple que:

$f(a)$ no existe y $\lim_{x\to a} f(x)$ si existe

Y $f(x)$ tiene una **discontinuidad no removible** en $x = a$ si se cumple que:

$f(a)$ no existe y $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe

Ejemplos.

Obtenga las discontinuidades de cada función e identifique de qué tipo son:

1) $f(x) = \dfrac{5}{x-4}$

$f(x)$ es discontinua en $x = 4$ y es de tipo no removible dado que:

$f(a) = f(4) = \dfrac{5}{4-4} = \dfrac{5}{0}$ no existe y $\lim_{x\to 4} \dfrac{5}{x-4} = \dfrac{5}{0}$ no existe.

2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

$f(x)$ es discontinua en $x=1$ y es de tipo removible dado que:

$f(a)=f(1)=\dfrac{0}{0}$ no existe

y $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ si existe.

Y tiene una discontinua no removible en $x=-1$ dado que:

$f(a)=f(1)=\dfrac{-2}{0}$ no existe

y $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{0}$ no existe.

3) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-4x}$

$f(x)$ tiene una discontinua removible en $x=-2$ dado que:

$f(a)=f(-2)=\dfrac{0}{0}$ no existe

y $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}$ si existe.

Tiene una discontinua removible en $x=2$ dado que:

$f(a)=f(2)=\dfrac{0}{0}$ no existe.

y $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$ si existe.

Y tiene una discontinua no removible en $x=0$ dado que:

$f(a)=f(0)=\dfrac{-4}{0}$ no existe.

Y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x\left(x^2-4\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0}$ no existe.

6.4. Teoremas sobre continuidad

Teorema 1. Si f y g son funciones continuas en $x = a$, entonces:

a) $f + g$ es continua en $x = a$.

b) $f - g$ es continua en $x = a$.

c) $f \cdot g$ es continua en $x = a$.

d) $\frac{f}{g}$ es continua en $x = a$, siempre que $g(a) \neq 0$.

Teorema 2. Las funciones polinomiales son continuas en todo valor real.

Ejemplos.

1) Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 5 \quad y \quad g(x) = 4x^2 + x - 5$. Obtenga la suma, la recta, el producto, el cociente y verifique si son continuas o no.

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \left(2x^2 - 3x + 5\right) + \left(4x^2 + x - 5\right) = 6x^2 - 2x$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \left(2x^2 - 3x + 5\right) - \left(4x^2 + x - 5\right) = -2x^2 - 4x + 10$

c) $$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = \left(2x^2 - 3x + 5\right)\left(4x^2 + x - 5\right) \\ &= 8x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 12x^3 - 3x^2 + 15x + 20x^2 + 5x - 25 \\ &= 8x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 20x - 25\end{aligned}$$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2 - 3x + 5}{4x^2 + x - 5}$

Ahora por el teorema 2, se sabe que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en todos los reales por ser funciones polinomiales y por el teorema 1 se concluye que: $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son continuas en todos los reales y que f / g es continua en todos los reales menos los valores de x para los que $g(x) = 0$, es decir f / g es continua en $\mathbb{R} - \left\{1, -\frac{5}{4}\right\}$.

6.5 Continuidad en un intervalo

Definición. Se dice que la función $f(x)$ es continua en un intervalo (a, b), si $f(x)$ es continua en cada punto de dicho intervalo.

Ejemplos.

1) Verifique si las funciones que se dan son continuas o no en todos los reales.

a) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & si \quad x<2 \\ \\ 6-x & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

La función es continua en todos los reales, si es continua en $x=2$ y en ejemplo “6a” de la sección 6.2 se verificó que si es continua en $x=2$. Por lo tanto la función es continua en todos los reales.

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\leq -2 \\ 2-x & si \quad -2<x\leq 2 \\ 2x-1 & si \quad x>2 \end{cases}$

En el ejemplo “6c” de la sección 6.2 se verificó que esta función no es continua en $x=-2$ ni en $x=2$. Luego la función es continua en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

c) $f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x<-4 \\ \sqrt{16-x^2} & si \quad -4\leq x<4 \\ x-4 & si \quad x\geq 4 \end{cases}$

Este ejemplo también fue trabajado en la sección 6.2 con el número “6.d” y se verificó que la función es continua en $x=-4$ y en $x=4$. Por lo tanto la función es continua en todos los reales.

2) Obtenga el valor de k de tal forma que la función sea continua en todos los reales.

a) $f(x)=\begin{cases} 3x+7 & si \quad x\leq 4 \\ \\ kx-1 & si \quad x>4 \end{cases}$

Para que la función sea continua en todos los reales es necesario que sea continua en $x=4$ y resulta continua en $x=4$ si:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)$$

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\left(3x+7\right)=19$ y $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\left(kx-1\right)=4k-1$

Por lo tanto $4k-1=19 \quad\Rightarrow\quad 4k=20 \quad\Rightarrow\quad k=5$

Luego la función es continua en todos los reales si $k=5$.

b) $f(x)=\begin{cases} 4kx^2-2 & si \quad x<1 \\ \\ 3kx+7 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

La función es continua en todos los reales si es continua en $x=1$ y resulta continua en $x=1$ si:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(4kx^2-2\right)=4k-2$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(3kx+7\right)=3k+7$

Por lo tanto $4k-2=3k+7 \quad \Rightarrow \quad k=9$

Luego la función es continua en todos los reales si $k=9$.

3) Obtenga el valor de c y k de tal forma que la función sea continua en todos los reales.

a) $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<1 \\ cx+k & si \quad 1\leq x<4 \\ -2x & si \quad x\geq 4 \end{cases}$

La función es continua en todos los reales si es continua en $x=1$ y en $x=4$. Y resulta continua en $x=1$ si:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\left(x\right)=1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x14^+}\left(cx+k\right)=c+k$

$$\therefore \quad c+k=1 \quad \cdots \quad (1)$$

De igual forma la función es continua en $x=4$ si:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)$$

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\left(cx+k\right)=4c+k$ y $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\left(-2x\right)=-8$

$$\therefore \quad 4c+k=-8 \quad \cdots \quad (2)$$

A continuación se le da solución al sistema de ecuaciones que se forma, siendo este:

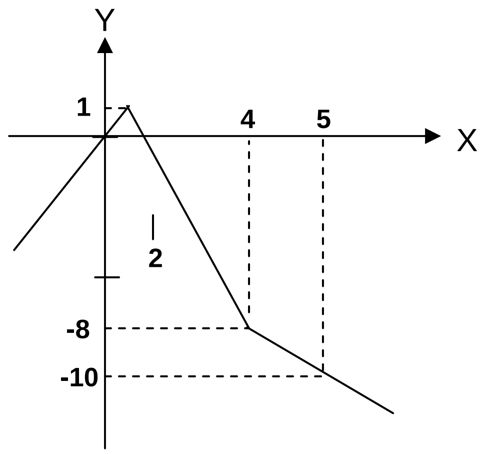
$$c+k=1 \quad \cdots \quad (1)$$
$$4c+k=-8 \quad \cdots \quad (2)$$

Para darle solución se multiplica la ecuación (1) por menos uno y se suma con la ecuación (2).

$$-c-k=-1 \quad \cdots \quad (1)$$
$$4c+k=-8 \quad \cdots \quad (2)$$
$$3c \qquad =-9$$

Luego la función es continua en todos los reales para $c=-3 \quad y \quad k=4$.

La gráfica de la función al sustituir los valores obtenidos es la siguiente:



b) $f(x)=\begin{cases} x+2c & si \quad x<-2 \\ 3cx+k & si \quad -2\leq x\leq 1 \\ 3x-2k & si \quad x>1 \end{cases}$

La función es continua en todos los reales si es continua en $x=-2$ y en $x=1$. Y resulta continua en $x=-2$ si:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(x+2c\right)=-2+2c$ y $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x-2^+}\left(3cx+k\right)=-6c+k$

Al igualar ambos límites se obtiene la ecuación:

$$-2+2c=-6c+k$$
$$\therefore \quad 8c-k=2 \quad \cdots \quad (1)$$

De igual forma la función es continua en $x=1$ si:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(3cx + k\right) = 3c + k \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(3x - 2k\right) = 3 - 2k$$

$$\therefore \quad 3c + k = 3 - 2k$$

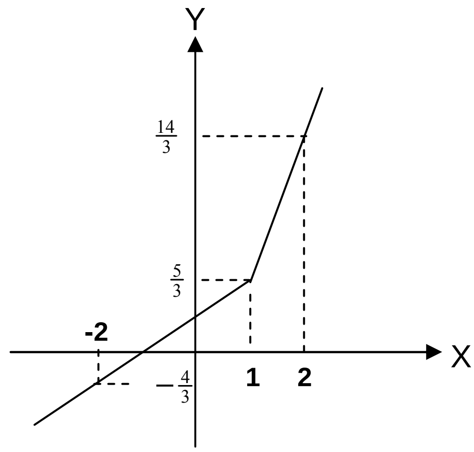
De donde se obtiene la ecuación: $3c + 3k = 3 \quad \Rightarrow \quad c + k = 1 \quad \cdots \quad (2)$

Enseguida se da el sistema de ecuaciones que se forma:

$$\begin{aligned} 8c - k &= 2 \quad \cdots \quad (1) \\ c + k &= 1 \quad \cdots \quad (2) \end{aligned}$$

Y su solución es: $c = \frac{1}{3} \quad y \quad k = \frac{2}{3}$.

La gráfica de la función es:



6.6. Ejercicios

I) Verifique si las funciones son continuas en los puntos indicados.

1) $f(x) = \dfrac{2}{x-2} \quad en \quad x = 4.$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x-3} \quad en \quad x = 3.$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} & si \quad x \neq 2 \\ 1 & si \quad x = 2 \end{cases} \quad en \quad x = 2.$

4) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-2} & si \quad x\neq 4 \\ \\ 8 & si \quad x=4 \end{cases} \qquad en \quad x=4.$$

5) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+5x}{x} & si \quad x\neq 0 \\ \\ 5 & si \quad x=0 \end{cases} \qquad en \quad x=0.$$

6) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^3}{1-x} & si \quad x\neq 1 \\ \\ 3 & si \quad x=1 \end{cases} \qquad en \quad x=1.$$

II) Obtenga el valor de W de tal forma que cada una de las funciones sean continuas en los puntos indicados.

1) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-9x}{x-3} & si \quad x\neq 3 \\ \\ W & si \quad x=3 \end{cases} \qquad en \quad x=3.$$

2) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{4x-8} & si \quad x\neq 2 \\ \\ W & si \quad x=2 \end{cases} \qquad en \quad x=2.$$

3) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+5x-8}{x-1} & si \quad x\neq 1 \\ \\ W & si \quad x=1 \end{cases} \qquad en \quad x=1.$$

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^4-16} & si \quad x\neq 2 \\ \\ W & si \quad x=2 \end{cases}$ $\quad en \quad x=2.$

5) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} & si \quad x\neq 0 \\ \\ W & si \quad x=0 \end{cases}$ $\quad en \quad x=0.$

III) Obtenga los puntos de discontinuidad de cada función y diga de que tipo se trata.

1. $f(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

2. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

3. $f(x)=\dfrac{6x}{x^3-x^2}$

4. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-x}$

5. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-4x}$

6. $f(x)=\dfrac{x(x+1)(x-3)}{(x-5)(x^3-2x^2-3x)}$

7. $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$

8. $f(x)=\dfrac{|x+7|}{x+7}$

9. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-5|}{x-5} & si \quad x\neq 5 \\ \\ 1 & si \quad x=5 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{|2x+3|} & si \quad x\neq -\dfrac{3}{2} \\ \\ -1 & si \quad x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

IV) Verifique si las funciones son continuas en todo punto.

11. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

12. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

13. $f(x)=\dfrac{5}{x^3-x^2}$

14. $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$

15. $f(x)=\dfrac{x+5}{|x+5|}$

16. $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & si \quad x\le 1 \\ 2+2x & si \quad x>1 \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\le 1 \\ 2x+1 & si \quad 1<x<3 \\ 2+x & si \quad x\ge 3 \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & si \quad x\ne 3 \\ 1 & si \quad x=3 \end{cases}$

V) Obtenga los valores de “c” y “k” de tal forma que las funciones sean continuas en todos los reales.

1. $f(x)=\begin{cases} 3k+2x & si \quad x\le 1 \\ 5x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x\le 0 \\ 2-3k & si \quad x>0 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 2kx^2-1 & si \quad x<2 \\ kx+2 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<1 \\ cx+k & si \quad 1\le x<4 \\ -2x & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 2cx+1 & si \quad x\le 1 \\ 3cx+k & si \quad 1<x<2 \\ 2kx+3 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x+2c & si \quad x<-2 \\ 3cx+k & si \quad -2\le x\le 1 \\ 3x-2k & si \quad x>1 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} -3 & si \quad x\le 0 \\ cx+2k & si \quad 0<x<2 \\ 3k & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} cx^2+2 & si \quad x<-1 \\ 2cx+3k & si \quad -1\le x< \\ 4kx+2c & si \quad x\ge 3 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} x^2-3cx+2k & si \quad x\le \\ -4x+3 & si \quad -2< \\ -x^2+(2c+5)x+k & si \quad x\ge \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} (2x-1)^2+1 & si \quad x\le \\ cx+k & si \quad 1<x \\ (x+2)^2-2 & si \quad x\ge \end{cases}$

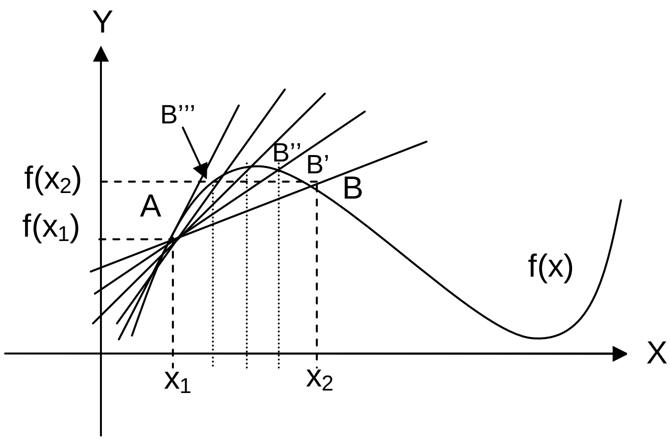
UNIDAD 7

DERIVADAS

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno será capaz de:

- ♦ Relacionar el concepto de límite con el problema de la razón de cambio instantánea de una función de manera geométrica.
- ♦ Hacer uso del concepto de límite de una función para el cálculo de la derivada de una función.
- ♦ Obtener la derivada de una función por medio de las fórmulas de derivación.
- ♦ Aplicar las fórmulas de derivación para evaluar la derivada de una función compuesta (Regla de la Cadena) y en derivadas de orden superior.



7) DERIVADAS

7.1. Introducción

La creación del cálculo diferencial e integral o llamado simplemente cálculo, es atribuida principalmente a **Isaac Newton y a Leibniz**, personajes dedicados a la ciencia y a la filosofía. El cálculo desde su creación fue una herramienta matemática inventada en el siglo XVII para resolver problemas de la física y de la geometría. A partir de su creación, el cálculo ha ocupado un lugar muy importarte dentro de la cultura occidental, dado que se convirtió en un instrumento indispensable para la ciencia. Sus aplicaciones son innumerables no sólo en la física y en la geometría sino también en la química, la biología, la ingeniería, la economía, etc.

Al remitirnos a la historia del cálculo después del siglo XVII se observan dos aspectos diferentes. Por un lado están las aplicaciones y por el otro, la evolución teórica del cálculo mismo. En la actualidad el cálculo además de ser una herramienta matemática necesaria y útil es también una teoría matemática completa y rigurosa. En particular y para los intereses de esta unidad se le dará prioridad a la solución de problemas y en este sentido se le dará solución al problema fundamental que propició la creación del Cálculo Diferencial, siendo éste: La obtención de la recta tangente a una curva en un punto:

7.2. Interpretación geométrica

Velocidad instantánea

Muchos de nosotros tenemos la noción intuitiva de velocidad como rapidez con la que se recorre una distancia en un cierto intervalo tiempo. Por ejemplo, si un carro recorre, 100 Km en una hora, su velocidad media (o promedio) debe haber sido 100 km/h. Es claro que el carro durante todo el trayecto no conservó la velocidad de 100 km/h, dado que disminuye la velocidad al pasar por los poblados, y la aumenta al rebasar otros vehículos. Es decir, la velocidad varía en el tiempo. Ahora, si el conductor del automóvil quiere realizar el recorrido de 100 km que existen de una ciudad a otra en una hora, es necesario que en ciertos momentos la velocidad del automóvil supere los 100 km/h para que se recuperen los kilómetros faltantes cuando el conductor circula a velocidad menor a 100 km/h. De hecho saber que la velocidad promedio es de 100 km/h, de ninguna forma responde la pregunta: ¿Cuál es la velocidad del automóvil en un instante particular?

Velocidad media

En general la velocidad media o rapidez media de un objeto en movimiento, se define como:

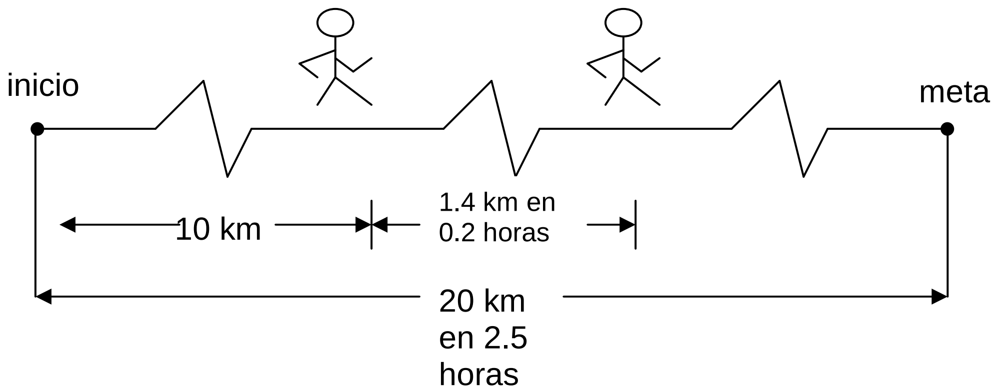
$$Vm = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ del\ recorrido}$$

Por ejemplo si un corredor realiza una carrera de 20 km/h en un tiempo de 2 horas 30 minutos (2.5 horas). La velocidad media del corredor durante el recorrido fue

$$Vm = \frac{20\ km}{2.5\ h} = 8\ km/h$$

pero si ahora se desea determinar la velocidad exacta V del corredor en el instante en el que se cumplió 30 minutos de la carrera. Si la distancia recorrida en el intervalo d tiempo de 0 a 1 hora es de 10 km, entonces

$$Vm = \frac{10\ km}{1\ h} = 10\ km/h$$



Nuevamente, este número no es una medida, o quizás ni siquiera un buen indicador, de la rapidez instantánea V a la que el corredor se mueve al cabo de 1 hora de carrera. Si se determina que el corredor en 1.2 horas está a 11.4 km de la línea de salida, entonces la velocidad media de 0 a 1.2 horas es:

$$Vm = \frac{11.4\ km}{1.2\ h} = 9.5\ km/h$$

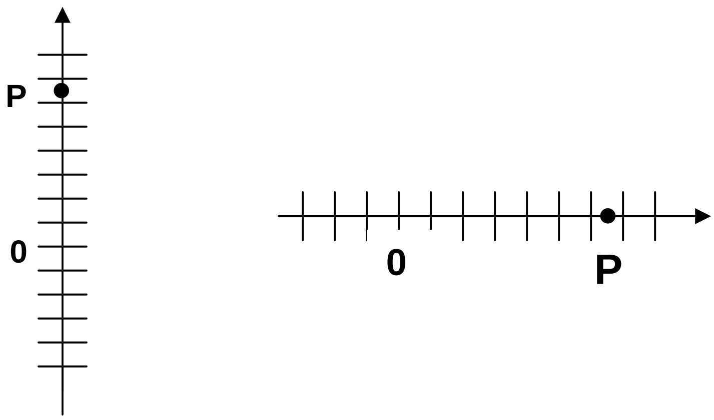
sin embargo, a través del intervalo de tiempo de 1 hora a 1.2 horas

$$Vm = \frac{11.2\ km - 10\ km}{1.2\ h - 1\ h} = \frac{1.4 km}{0.2 h} = 7\ km/h$$

dicho número es una medida más realista de la razón V. Si se reduce el intervalo de tiempo entre 1 hora y el instante que corresponda a una posición con medida cercana a 10 km, se espera que mejoren las aproximaciones e la velocidad del corredor cuando el tiempo es 1 hora.

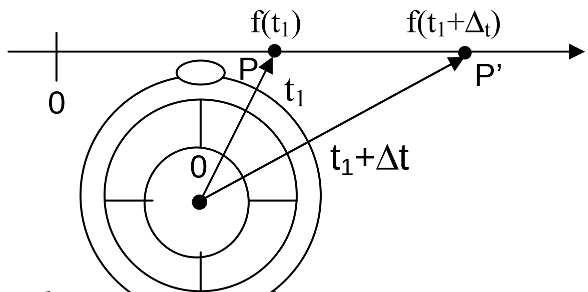
Movimiento rectilíneo

Con el objeto de generalizar las ideas anteriores, supongamos que un objeto, o una partícula, situada en un punto P, se mueven sobre una recta coordenada, esta recta puede ser horizontal o vertical, como se muestra en la siguiente figura



Supóngase, además que la partícula se mueve de manera que su posición, o coordenada, sobre la recta, está dada por la función $s = f(t)$, en donde "t" indica el tiempo. Los valores de "s" son distancias dirigidas medidas desde 0 (cero), en unidades como pueden ser: centímetros, metros, pies, etc. Si P está a la derecha o arriba de 0, se toma s>0, de forma similar, cuando P está a la izquierda o debajo de 0, s<0. El **movimiento rectilíneo** es el que tiene lugar en una línea recta.

Si una partícula se encuentra en el punto P en el tiempo t_1 y en P' en el tiempo $t_1+\Delta_t$, luego las coordenadas de los puntos son $f(t_1)$ y $f(t_1+\Delta_t)$, como se ilustra en la figura siguiente.



Al recordar que $Vm = \dfrac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo del recorrido}}$, la velocidad media de las partículas en el intervalo de tiempo $[t_1, t_1+\Delta_t]$ es

$$Vm = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{f(t_1+\Delta_t) - f(t_1)}{\Delta_t}$$

es decir $Vm = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Esto sugiere que el $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ representa la razón de cambio instantáneo de f(t) en t_1, o sea la **velocidad instantánea**.

Definición

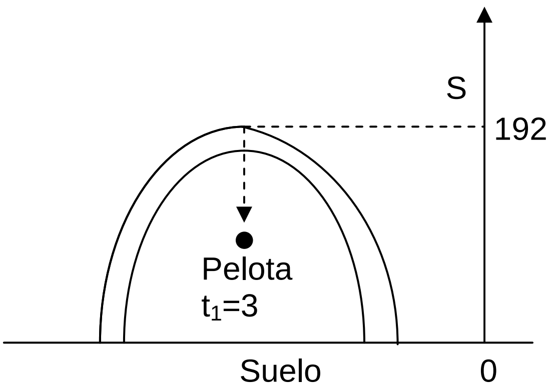
Supóngase que $s = f(t)$ representa una función que indica la posición de un objeto en movimiento en línea recta. La velocidad instantánea en el tiempo t_1 está dada por

$$V(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta_t) - f(t_1)}{\Delta_t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

siempre y cuando el límite exista.

Ejemplos

1) La altura s sobre el suelo, de una pelota que se deja caer desde la parte superior de St Louis Gateway Arch está dada por $s = -4.9t^2 + 192$, en donde s se mide en metros y t en segundos. Encontrar la velocidad instantánea de la pelota cuando t_1=3 segundos.



Respuesta. Al utilizar la definición, se sabe que la velocidad instantánea es:

$$V(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta_t) - f(t_1)}{\Delta_t}$$

ahora al considerar la información del problema

$$\begin{aligned} f(t_1) &= -4.9t_1^{\,2} + 192 \\ y \quad f(t_1 + \Delta t) &= -4.9(t_1 + \Delta t)^2 + 192 \\ &= -4.9(t_1^{\,2} + 2t_1\Delta t + \Delta t^2) + 192 \\ &= -4.9t_1^{\,2} - 9.8t_1\Delta t - 4.9\Delta t^2 + 1 \end{aligned}$$

Luego:

$$V(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-4.9t_1^{\ 2} - 9.8t_1\Delta t - 4.9\Delta t^2 + 192 + 4.9t_1^{\ 2} - 192}{\Delta_t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-9.8t_1\Delta t - 4.9\Delta t^2}{\Delta_t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(-9.8t_1 - 4.9\Delta t)}{\Delta_t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}(-9.8t_1 - 4.9\Delta t) = -9.8t_1$$

Por lo tanto la velocidad instantánea a los 3 segundos es:

$$v(3) = -9.8(3) = -29.4m/s.$$

Obsérvese que el signo negativo del resultado, indica que la pelota se mueve hacia abajo, que es la dirección contraria a la positiva.

2) Un globo aerostático sube verticalmente. A las t horas su distancia s de la tierra, medida en kilómetros está dada por la fórmula $s(t) = 9t - 3t^2$.
   a) ¿Cuál será la velocidad instantánea del globo en la primera hora?
   b) ¿Cuál será la velocidad instantánea del globo en la segunda hora?

Respuesta:

Sabemos que la velocidad instantánea está representada por

$$V(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta_t) - f(t_1)}{\Delta_t}$$

o su equivalente

$$V(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_1 + \Delta_t) - S(t_1)}{\Delta_t}$$

$$f(t_1) = 9t_1 - 3t_1^{\ 2}$$

$$y \quad f(t_1 + \Delta t) = 9(t_1 + \Delta t) - 3(t_1^{\ 2} + 2t_1\Delta t + \Delta t^2)$$

$$= 9t_1 + 9\Delta t - 3t_1^{\ 2} - 6t_1\Delta t - 3\Delta t^2$$

Luego:

$$V(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(9t_1 + 9\Delta t - 3t_1^{\ 2} - 6t_1\Delta t - 3\Delta t^2) - (9t_1 - 3t_1^{\ 2})}{\Delta_t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{9t_1 + 9\Delta t - 3t_1^{\ 2} - 6t_1\Delta t - 3\Delta t^2 - 9t_1 + 3t_1^{\ 2}}{\Delta_t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{9\Delta t - 6t_1\Delta t - 3\Delta t^2}{\Delta_t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(9 - 6t_1 - 3\Delta t)}{\Delta_t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}(9 - 6t_1 - 3\Delta t) = 9 - 6t_1$$

Por lo tanto la velocidad instantánea en la primera hora es:

$$v(1) = 9 - 6(1) = 3km/h$$

y la velocidad instantánea en la segunda hora es:

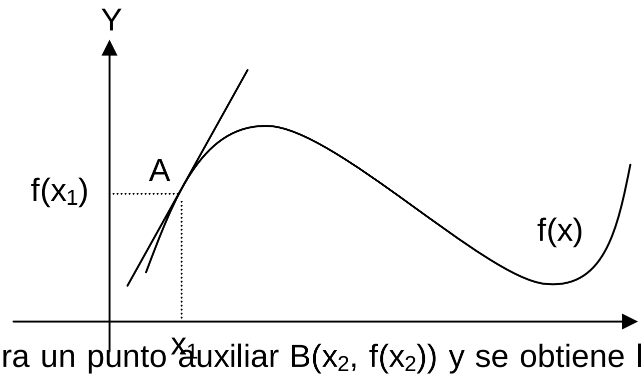
$$v(2) = 9 - 6(2) = -3 km/h$$

Observemos que el resultado fue negativo y esto indica que el globo al cumplir 2 horas de vuelo ya va hacia abajo.

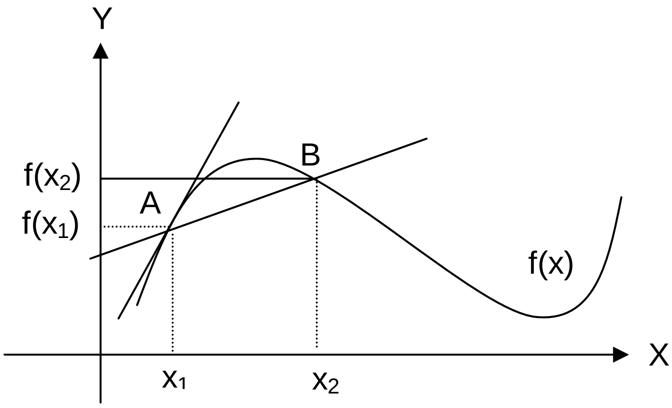
El problema de las tangentes

El problema de encontrar tangentes a curvas ha ocupado el interés de muchas personas a lo largo de la historia matemática y se han ideado numerosos métodos para construir tangentes a ciertas curvas especiales. Como ejemplos, los antiguos geómetras griegos idearos métodos para construir rectas tangentes a curvas como la circunferencia, la parábola, la elipse, etc., pero fue hasta el siglo XVII, cuando personajes como Newton y Leibniz descubrieron una herramienta general que puede ser utilizada para obtener la recta tangente a cualquier curva en un punto. Y es precisamente dicho proceso del que nos ocuparemos en seguida.

Supongamos que $f(x)$ es una función continua en $x = x_1$. Ahora nuestro problema consiste en obtener la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $A\left(x_1, f(x_1)\right)$.



Primero se considera un punto auxiliar B(x_2, f(x_2)) y se obtiene la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B. Una descripción geométrica es:



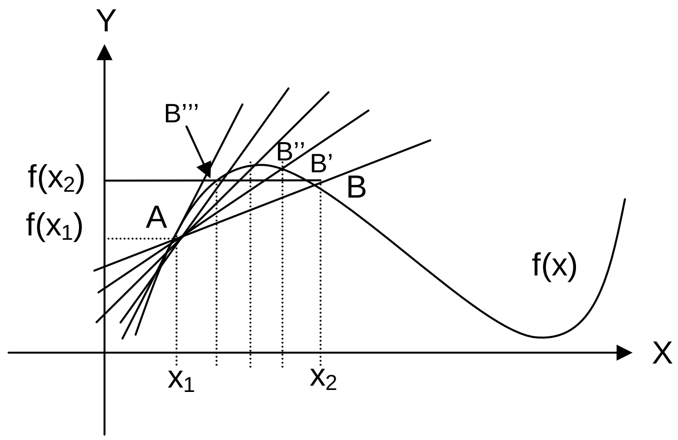
La pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

al realizar el cambio de variable $\Delta x = x_2 - x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 + \Delta x \quad \Rightarrow$

$$m = \frac{f(\Delta x + x_1) - f(x_1)}{\Delta x}$$

si tomamos puntos auxiliares B’, B’’, B’’’, etc., que se aproximan al punto A y al trazar las líneas que pasan por A y B’, A y B’’, A y B’’’, como se muestra en la figura siguiente:



Observemos que las pendientes de las rectas, a medida que se aproximan más al punto A, tienden al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A. Al tomar los puntos B, B’, B’’, B’’’, la abscisa x_2 se aproxima a x_1, como $\Delta x = x_2 - x_1$ implica que Δx tiende a cero. Lo anterior muestra un mecanismo para calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto arbitrario, ahora generalizaremos este proceso a través de la siguiente definición:

Definición. Supongamos que f es una función continua en x_1, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $A(x_1,f(x_1))$ es denotada por $m(x_1)$ y está dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

si dicho límite existe.

7.3. Definición de la derivada de una función

Definición. La derivada de la función $f(x)$ se denota por $f^{'}(x)$ o por $\frac{df(x)}{dx}$, para cualquier número x en el dominio de la función se define por:

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si el límite existe.

Observemos que la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, es lo mismo que la derivada de la función evaluada en dicho punto.

Es común que en los libros de texto se utilice la igualdad $\Delta x = h$, y al realizar esta sustitución, llegamos a que la derivada de una función se representa por

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y esta es la notación que se utilizará en el transcurso del texto.

7.4. Derivación de funciones utilizando la definición

Ejemplos

Obtenga la derivada de cada funcione, utilizando la definición.

1) $f(x) = x^2$

Al utilizar la definición sabemos que la derivada de la función es:

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x+h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$\therefore\ f^{'}(x) = 2x$$

2) $f(x) = x^2 + 2x$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2(x+h)-(x^2+2x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+2x+2h-x^2-2x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+2)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+2) \\
&= 2x+2
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ f'(x) = 2x+2$$

3) $f(x) = 2x^2+3x+5$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2+3(x+h)+5-(2x^2+3x+5)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2(x^2+2xh+h^2)+3x+3h+5-2x^2-3x-5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+3x+3h+5-2x^2-3x-5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h+3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(4x+2h+3) = 4x+3
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ f'(x) = 4x+3$$

4) $f(x) = x^3$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ f'(x) = 3x^2$$

5) $f(x) = x^3 + 4x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 + 4(x+h) - (x^3 + 4x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 4x + 4h - x^3 - 4x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 4)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 + 4) = 3x^2 + 4$$

$$\therefore\ f'(x) = 3x^2 + 4$$

6) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

7) $f(x)=\sqrt{8x-7}$

$$f^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{8x+8h-7}-\sqrt{8x-7}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{8x+8h-7}-\sqrt{8x-7}\right)\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}{h\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{8x+8h-7}\right)^2-\left(\sqrt{8x-7}\right)^2}{h\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{8x+8h-7-8x+7}{h\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{8h}{h\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{8}{\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}$$
$$=\frac{8}{\left(\sqrt{8x-7}+\sqrt{8x-7}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{8x-7}}$$

$$f^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{8x+8h-7}-\sqrt{8x-7}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{8x+8h-7}-\sqrt{8x-7}\right)\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}{h\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{8x+8h-7}\right)^2-\left(\sqrt{8x-7}\right)^2}{h\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{8x+8h-7-8x+7}{h\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{8h}{h\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{8}{\left(\sqrt{8x+8h-7}+\sqrt{8x-7}\right)}$$
$$=\frac{8}{\left(\sqrt{8x-7}+\sqrt{8x-7}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{8x-7}}$$

$$\therefore\ f^{'}(x)=\frac{1}{2\sqrt{8x-7}}$$

7.5. Fórmulas de derivación y su utilización para derivar funciones de todo tipo.

Fórmulas básicas de derivación

1) $(c)' = 0$ 2) $(cx)' = c$

3) $[cu]' = c \cdot u'$ 4) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

5) $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$ 6) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

7) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$ 8) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

Cuando c es una constante, "u" y "v" son funciones que dependen de la variable x.

Ejemplos.

Obtenga la derivada de las funciones que se dan, utilizando las fórmulas de derivación.

1) $y = 10$, $y' = 0$ 2) $y = 5x$, $y' = 5$ 3) $y = x^3$, $y' = 3x^2$ 4) $y = 7x^5$, $y' = 35x^4$

5) $y = 2x^4 - 6x^2 + 3x - 9$, $y' = 8x^3 - 12x + 3$ 6)

$$y = \frac{8}{x^2} = 8x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = -8x^{-2-1} = -8x^{-3} = -\frac{8}{x^3}$$

7) $y = \sqrt{x^3} = (x)^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3}{2}(x)^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

En estos siete ejemplos se usaron las fórmulas 1, 2, 3, 4 y 6.

En los ejemplos 8, 9 y 10, se usará la fórmula 5.

8) $y = (2x+3)^4$

Si $u = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad u' = 2$

$\therefore \quad y' = 4(u)^{4-1} \cdot u' = 4(2x+3)^3 (2) = 8(2x+3)^3$

9) $y = \sqrt{1-3x}$

Si $u=1-3x \quad \Rightarrow \quad u'=-3$ y sabiendo que $y=\sqrt{1-3x}=u^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \quad y'=\frac{1}{2}(u)^{\frac{1}{2}-1}(u')=\frac{1}{2}(1-3x)^{-\frac{1}{2}}(-3)=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{3}{2\sqrt{1-3x}}$$

10) $y=\sqrt[3]{\left(4x^2-7\right)^2}$

Si $u=4x^2-7 \quad \Rightarrow \quad u'=8x$ y sabiendo que $y=\sqrt[3]{\left(4x^2-7\right)^2}=(u)^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore \quad y'=\frac{2}{3}(u)^{\frac{2}{3}-1}(u')=\frac{2}{3}\left(4x^2-7\right)^{-\frac{1}{3}}(8x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{8x}{\left(4x^2-7\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{16x}{3\sqrt[3]{4x^2-7}}$$

En los ejemplos 11 y 12 se usa la fórmula 7.

11) $y=\left(x^2-1\right)\left(2x^3+3\right)$

$$u=x^2-1 \quad y \quad v=2x^3+3 \quad \Rightarrow \quad u'=2x \quad y \quad v'=6x^2$$

$$\therefore \quad y'=u\cdot v'+v\cdot u'=\left(x^2-1\right)\left(6x^2\right)+\left(2x^3+3\right)(2x)$$

$$=6x^4-6x^2+4x^4+6x=10x^4-6x^2+6x$$

12) $y=(1-x)^3(5x+1)^4$

$$u=(1-x)^3 \quad y \quad v=(5x+1)^4 \quad \Rightarrow \quad u'=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$$

$$y \quad v'=4(5x+1)^3(5)=20(5x+1)^3$$

$$\therefore \quad y'=u\cdot v'+v\cdot u'=(1-x)^3\cdot 20(5x+1)^3+(5x+1)^4\left[-3(1-x)^2\right]$$

$$=20(1-x)^3(5x+1)^3-3(5x+1)^4(1-x)^2$$

En los ejemplos 13 y 14 se usa la fórmula 8.

13) $y=\dfrac{4x+10}{2x-9}$

$$u=4x+10 \quad y \quad v=2x-9 \quad \Rightarrow \quad u'=4 \quad y \quad v'=2$$

$$\therefore \quad y'=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2}=\frac{(2x-9)(4)-(4x+10)(2)}{(2x-9)^2}$$

$$=\frac{8x-36-8x-20}{(2x-9)^2}=-\frac{56}{(2x-9)^2}$$

14) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}$

$$u = \sqrt{x} \quad y \quad v = \sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y \quad v' = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\cdot \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

Derivación de funciones exponenciales.

Las fórmulas que utilizaremos para obtener la derivada de las funciones exponenciales $y = e^u$ y $y = a^u$ son:

$$\boxed{y' = e^u \cdot u' \qquad \text{y} \qquad y = a^u \cdot \ln a \cdot u'}$$

en donde $a > 0$.

Ejemplos

Obtenga la derivada de las funciones que se indican.

1) $y = e^{3x+5}$

$$y' = e^{3x+5} \cdot (3x+5)' = e^{3x+5} \cdot 3 = 3e^{3x+5}$$

2) $y = e^{x^3+8}$

$$y' = e^{x^3+8} \cdot (x^3+8)' = e^{x^3+8} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^2+8}$$

3) $y = e^{2x^6+2x-7}$

$$y' = e^{2x^6+2x-7} \cdot (2x^6+2x-7)' = e^{2x^6+2x-7} \cdot (12x^5+2) = (12x^5+2)e^{2x^6+2x-7}$$

4) $y = e^{\sqrt{x}}$

$$y' = e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)' = e^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$$

5) $y = e^{\sqrt{9x-1}}$

$$y' = e^{\sqrt{9x-1}}\left(\sqrt{9x-1}\right)' = e^{\sqrt{9x-1}}\left(\frac{1}{2}(9x-1)^{-\frac{1}{2}}(9x-1)'\right) = \frac{1}{2\sqrt{9x-1}}(9)e^{\sqrt{9x-1}}$$

$$= \frac{9}{2\sqrt{9x-1}}e^{\sqrt{9x-1}}$$

6) $y = e^{\sqrt{x^2-5}}$

$$y' = e^{\sqrt{x^2-5}}\left(\sqrt{x^2-5}\right)' = e^{\sqrt{x^2-5}}\left(\frac{1}{2}(x^2-5)^{-\frac{1}{2}}(x^2-5)'\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-5}}(2x)e^{\sqrt{x^2-5}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2-5}}e^{\sqrt{x^2-5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}e^{\sqrt{x^2-5}}$$

7) $y = e^{\frac{4}{x+1}}$

$$y' = e^{\frac{4}{x+1}}\left(\frac{4}{x+1}\right)' = e^{\frac{4}{x+1}}\left(\frac{(x+1)(0)-4(1)}{(x+1)^2}\right) = e^{\frac{4}{x+1}}\left(\frac{-4}{(x+1)^2}\right)$$

$$= -\frac{4}{(x+1)^2}\cdot e^{\frac{4}{x+1}}$$

8) $y = e^{\frac{2x}{3x-9}}$

$$y' = e^{\frac{2x}{3x-9}}\left(\frac{2x}{3x-9}\right)' = e^{\frac{2x}{3x-9}}\left(\frac{(3x-9)(2)-2x(3)}{(3x-9)^2}\right) = e^{\frac{2x}{3x-9}}\left(\frac{6x-18-6x}{(3x-9)^2}\right)$$

$$= -\frac{18}{(3x-9)^2}\cdot e^{\frac{2x}{3x-9}}$$

9) $y = \sqrt{e^x + x^2 - 4x} = \left(e^x + x^2 - 4x\right)^{1/2}$

$$y' = \tfrac{1}{2}\left(e^x + x^2 - 4x\right)^{-1/2}(e^x + x^2 - 4x)' = \tfrac{1}{2}\left(e^x + x^2 - 4x\right)^{-1/2}(e^x + 2x - 4)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^x + x^2 - 4x}}\cdot\left(e^x + 2x - 4\right)$$

10) $y=5^{3x+8}$

En este ejemplo la $a=5$ y $u=3x+8.$ Luego:

$$y'=5^{3x+8}\cdot\ln 5\cdot(3x+8)'=5^{3x+8}\cdot\ln 5(3)=3\ln 5\cdot\left(5^{3x+8}\right)$$

11) $y=10^{1-x^2}$

$a=10$ y $u=1-x^2.$ Luego:

$$y'=10^{1-x^2}\cdot\ln 10\cdot(1-x^2)'$$
$$=10^{1-x^2}\cdot\ln 10\cdot(-2x)'$$
$$=-2x\ln 10\cdot\left(10^{1-x^2}\right)$$

12) $y=7^{\sqrt{2x+3}}$

Como $a=7$ y $u=\sqrt{2x+3}$

$$y'=7^{\sqrt{2x+3}}\cdot\ln 7\cdot\left(\sqrt{2x+3}\right)'$$
$$=7^{\sqrt{2x+3}}\cdot\ln 7\cdot\frac{1}{2}(2x+3)^{-1/2}(2x+3)'$$
$$=7^{\sqrt{2x+3}}\cdot\ln 7\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{(2x+3)^{1/2}}(2)$$
$$=7^{\sqrt{2x+3}}\cdot\ln 7\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$$
$$=\frac{\ln 7}{\sqrt{2x+3}}\cdot\left(7^{\sqrt{2x+3}}\right)$$

Derivadas de las funciones logarítmicas

La fórmula que utilizaremos para obtener la derivada de la función logaritmo natural $y=\ln u$ es:

$$\boxed{y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'}$$

Ejemplos

Obtenga la derivada de las funciones que se dan:

1) $y=\ln(2x+4)$

$$y'=\frac{1}{2x+4}(2x+4)'=\frac{1}{2x+4}(2)=\frac{2}{2x+4}$$

2) $y=\ln(x^2-1)$

$$y' = \frac{1}{x^2-1}\left(x^2-1\right)' = \frac{1}{x^2-1}\left(2x\right) = \frac{2x}{x^2-1}$$

3) $y = \ln(3x^2-6x+5)$

$$y' = \frac{1}{3x^2-6x+5}\left(3x^2-6x+5\right)' = \frac{1}{3x^2-6x+5}\left(6x-6\right) = \frac{6x-6}{3x^2-6x+5}$$

4) $y = \ln(1-x^2+2x^3)$

$$y' = \frac{1}{1-x^2+2x^3}\left(1-x^2+2x^3\right)' = \frac{1}{1-x^2+2x^3}\left(-2x+6x^2\right) = \frac{-2x+6x^2}{1-x^2+2x^3}$$

5) $y = \ln(\ln x)$

$$y' = \frac{1}{\ln x}\left(\ln x\right)' = \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\ln x}$$

Observación. Cuando sea necesario derivar funciones en donde aparezca el logaritmo de un producto, de un cociente o de una expresión elevada a una potencia. Se sugiere utilizar las propiedades del logaritmo; estas propiedades son:

1) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

3) $\ln a^r = r\ln a$

En las funciones siguientes, primero se aplicarán las propiedades que correspondan de los logaritmos y posteriormente se obtendrá la derivada de las funciones.

6) $y = \ln\left[(3x+1)(2x-4)\right]$

$$y = \ln(3x+1) + \ln(2x-4) \quad \text{prop. } 1$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3x+1}(3x+1)' + \frac{1}{2x-4}(2x-4)' \\ &= \frac{1}{3x+1}(3) + \frac{1}{2x-4}(2) \\ &= \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{2x-4} \end{aligned}$$

7) $y = \ln\left[(x^2+1)(x^3+2)\right]$

$$y = \ln(x^2+1) + \ln(x^3+2) \quad \text{prop. } 1$$

$$y' = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' + \frac{1}{x^3+2}(x^3+2)'$$
$$= \frac{1}{x^2+1}(2x) + \frac{1}{x^3+2}(3x^2)$$
$$= \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3x^2}{x^3+2}$$

8) $y = \ln\left(\dfrac{1-2x}{3x+1}\right)$

$$y = \ln(1-2x) - \ln(3x+1) \quad \text{prop. } 2$$

$$y' = \frac{1}{1-2x}(1-2x)' - \frac{1}{3x+1}(3x+1)'$$
$$= \frac{1}{1-2x}(-2) - \frac{1}{3x+1}(3)$$
$$= -\frac{2}{1-2x} - \frac{3}{3x+1}$$

9) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+x}{3x^2-7}\right)$

$$y = \ln(x^2+x) - \ln(3x^2-7) \quad \text{prop. } 2$$

$$y' = \frac{1}{x^2+x}(x^2+x)' - \frac{1}{3x^2-7}(3x^2-7)'$$
$$= \frac{1}{x^2+x}(2x) - \frac{1}{3x^2-7}(6x)$$
$$= \frac{2x}{x^2+x} - \frac{6x}{3x^2-7}$$

10) $y = \ln\sqrt{1-x-x^3} = \ln\left(1-x-x^3\right)^{1/2}$

$$y = \tfrac{1}{2}\ln\left(1-x-x^3\right) \quad \text{prop. } 3$$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x-x^3}\left(1-x-x^3\right)'$$
$$= \frac{1}{2(1-x-x^3)}\left(1-3x^2\right)$$
$$= \frac{1-3x^2}{2-2x-2x^3}$$

11) $y = \ln\sqrt{(4x+3)(x^4+5)} = \ln\left[(4x+3)(x^4+5)\right]^{1/2}$

$$y = \frac{1}{2}\cdot\ln\left[(4x+3)(x^4+5)\right] \text{ prop. } 3$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot\ln(4x+3) + \frac{1}{2}\cdot\ln(x^4+5) \text{ prop. } 1$$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4x+3}(4x+3)' + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4+5}(x^4+5)'$$

$$= \frac{1}{2(4x+3)}(4) + \frac{1}{2(x^4+5)}(4x^3)$$

$$y' = \frac{4}{8x+6} + \frac{4x^3}{2x^4+10}$$

12) $y = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{2x+10}\right)^2} = \ln\left(\frac{1-x}{2x+10}\right)^{2/3}$

$$y = \frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{1-x}{2x+10}\right) \text{ prop. } 3$$

$$y = \frac{2}{3}\cdot\ln(1-x) - \frac{2}{3}\cdot\ln(2x+10) \text{ prop. } 2$$

$$y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-x}(1-x)' - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2x+10}(2x+10)'$$

$$= \frac{2}{3(1-x)}(-1) - \frac{2}{3(2x+10)}(2)$$

$$y' = \frac{-2}{3-3x} - \frac{4}{6x+30}$$

13) $y = \ln\frac{(2x-5)^3(3x-1)^2}{(4x+9)^4}$

$$y = \ln(2x-5)^3(3x-1)^2 - \ln(4x+9)^4 \quad \text{prop. } 2$$

$$y = \ln(2x-5)^3 + \ln(3x-1)^2 - \ln(4x+9)^4 \quad \text{prop. } 1$$

$$y = 3\ln(2x-5) + 2\ln(3x-1) - 4\ln(4x+9) \quad \text{prop. } 3$$

$$y' = 3\cdot\frac{1}{2x-5}(2x-5)' + 2\cdot\frac{1}{3x-1}(3x-1)' - 4\cdot\frac{1}{4x+9}(4x+9)'$$

$$y' = 3\cdot\frac{1}{2x-5}(2) + 2\cdot\frac{1}{3x-1}(3) - 4\cdot\frac{1}{4x+9}(4)$$

$$y' = \frac{6}{2x-5} + \frac{6}{3x-1} - \frac{16}{4x+9}$$

Fórmulas para derivar las funciones trigonométricas

1) $(senu)' = \cos u \cdot u'$

2) $(\cos u)' = -senu \cdot u'$

3) $(\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$

4) $(\cot u)' = -cs\,c^2\, u \cdot u'$

5) $(\sec u)' = \sec u \tan u \cdot u'$

6) $(cs\,c u)' = -\mathrm{s}\csc u \cot u \cdot u'$

7) $\left[arc(senu)\right]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

8) $\left[arc(\cos u)\right]' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

9) $\left[arc(tanu)\right]' = \frac{u'}{1+u^2}$

10) $\left[arc(\cot u)\right]' = -\frac{u'}{1+u^2}$

11) $\left[arc(\sec u)\right]' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

12) $\left[arc(\csc u)\right]' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

En donde $"u"$ es una función que depende de la variable $"x"$.

Ejemplos

Obtenga la derivada de las funciones siguientes:

1) $y = sen(3x)$

Como $u = 3x \quad y \quad u' = 3$, entonces:

$$y' = \cos(3x) \cdot 3 = 3 \cdot \cos(3x)$$

2) $y = \cos(x^2)$

Como $u = x^2 \quad y \quad u' = 2x$, entonces:

$$y' = -sen(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot \left[-sen(x^2)\right] = -2xsen(x^2)$$

3) $y = \tan(4x^3 + 2x)$

$u = 4x^3 + 2x \quad y \quad u' = 12x^2 + 2$, entonces:

$$y' = \sec^2(4x^3 + 2x) \cdot (12x^2 + 2)$$
$$= (12x^2 + 2) \cdot \sec^2(4x^3 + 2x)$$

4) $y = \cot(e^x)$

$u = e^x \quad y \quad u' = e^x$, entonces:

$$y' = -\csc^2(e^x)\cdot e^x$$
$$= -e^x \cdot cs\,\mathrm{c}^2(e^x)$$

5) $y = \sec(senx)$

$u = senx \quad y \quad u' = \cos x$, entonces:

$$y' = \sec(senx)\cdot\tan(senx)\cdot\cos x$$
$$= \cos x\cdot\sec(senx)\cdot\tan(senx)$$

6) $y = cs\,\mathrm{c}(\tan x)$

$u = \tan x \quad y \quad u' = \sec^2 x$, entonces:

$$y' = -cs\,\mathrm{c}(\tan x)\cdot\cot(tanx)\cdot\sec^2 x$$
$$= -\sec^2 x\cdot cs\,\mathrm{c}(\tan x)\cdot\cot(tanx)\cdot$$

7) $y = sen\left(\dfrac{2x+3}{6x-7}\right)$

$$u = \frac{2x+3}{6x-7} \quad y \quad u' = \frac{(6x-7)\cdot 2-(2x+3)\cdot 6}{(6x-7)^2} = \frac{12x-14-12x-18}{(6x-7)^2} = \frac{-32}{(6x-7)^2}$$

Entonces:

$$y' = \cos\left(\frac{2x+3}{6x-7}\right)\cdot\left(\frac{-32}{(6x-7)^2}\right)$$
$$= -\frac{32}{(6x-7)^2}\cdot\cos\left(\frac{2x+3}{6x-7}\right)$$

8) $y = \tan(3x+9)\cdot\sec(x^5+2)$

Al utilizar la derivada de un producto y las fórmulas de las derivadas trigonométricas, llegamos a lo siguiente:

$$y' = \tan(3x+9)\cdot\left[\sec(x^5+2)\cdot\tan(x^5+2)\cdot 5x^4\right] + \sec(x^5+2)\left[\sec^2(3x+9)\cdot 3\right]$$
$$= 5x^4\cdot\tan(3x+9)\cdot\sec(x^5+2)\cdot\tan(x^5+2)\cdot + 3\sec(x^5+2)\sec^2(3x+9)$$

9) $y = \dfrac{sen(2x)}{\cos(2x)}$

Se utiliza la derivada de un cociente y las fórmulas de las derivadas trigonométricas:

$$= \frac{cox(2x)\cdot 2\cos(2x) - sen(2x)\left[-2sen(2x)\right]}{\left[\cos(2x)\right]^2}$$

$$= \frac{2\cos^2(2x) + 2sen^2(2x)}{\left[\cos(2x)\right]^2} = \frac{2\left[\cos^2(2x) + sen^2(2x)\right]}{\left[\cos(2x)\right]^2}$$

$$= \frac{2(1)}{\left[\cos(2x)\right]^2} = \frac{2}{\left[\cos(2x)\right]^2} = 2\left[\sec(2x)\right]^2 = 2\sec^2(2x)$$

Observemos que $y = \dfrac{sen(2x)}{\cos(2x)} = \tan 2x \quad \Rightarrow \quad y' = \sec^2(2x)\cdot 2 = 2\sec^2(2x)$.

10) $y = \dfrac{sen(3x)}{\cos(5x)}$

$$y' = \frac{\cos(5x)\cdot 3\cos(3x) - sen(3x)\cdot\left[-5sen(5x)\right]}{\left[\cos(5x)\right]^2}$$

$$= \frac{3\cos(5x)\cdot\cos(3x) + 5sen(3x)\cdot sen(5x)}{\left[\cos(5x)\right]^2}$$

11) $y = \dfrac{\tan(x^2)}{\sec(7x)}$

$$y' = \frac{\sec(7x)\cdot\sec^2(x^2)\cdot 2x - \tan(x^2)\cdot\sec(7x)\tan(7x)\cdot 7}{\left[\sec(7x)\right]^2}$$

$$= \frac{2x\sec(7x)\cdot\sec^2(x^2) - 7\tan(x^2)\cdot\sec(7x)\cdot\tan(7x)}{\left[\sec(7x)\right]^2}$$

$$= \frac{\sec(7x)\left[2x\sec^2(x^2) - 7\tan(x^2)\cdot\tan(7x)\right]}{\left[\sec(7x)\right]^2}$$

$$= \frac{2x\sec^2(x^2) - 7\tan(x^2)\cdot\tan(7x)}{\sec(7x)}$$

12) $y = sen^3(4x)$

En este ejemplo aparece una función de la forma u^n y cuya derivada es $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}\cdot u'$. Luego: $u = sen(4x) \quad \Rightarrow \quad u' = \cos(4x)\cdot 4 = 4\cos(4x)$. Por lo tanto:

$$y' = 3sen^2(4x).4\cos(4x) = 12sen^2(4x)\cdot\cos(4x)$$

13) $f(x)=\tan^5(6x+9)$

Nuevamente aparece una función de la forma u^n y cuya derivada es $\left(u^n\right)^{'}=nu^{n-1}\cdot u^{'}$. Luego: $u=\tan(6x+9) \quad \Rightarrow \quad u'=\sec^2(6x+9)\cdot 6=6\sec^2(6x+9)$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
y' &= 5\tan^4(6x+9)\cdot 6\sec^2(6x+9)\\
&= 30\tan^4(6x+9)\cdot 6\sec^2(6x+9)
\end{aligned}
$$

14) $y=\sec^4(\cot x)$

En este ejemplo $u=\sec(\cot x) \quad \Rightarrow \quad u'=\sec(\cot x)\cdot\tan(\cot x)(-\csc^2 x)$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
y' &= 4\sec^3(\cot x)\cdot\sec(\cot x)\tan(\cot x)(-\csc^2 x)\\
&= -4\sec^3(\cot x)\cdot\sec(\cot x)\tan(\cot x)\cdot\csc^2 x
\end{aligned}
$$

A continuación se dan ejemplos sobre la derivada de funciones inversas:

15) $y=arc(sen 3x)$

Como $u=3x \quad \Rightarrow \quad u'=3$. Luego:

$$y'=\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}=\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

16) $y=arc(\cos x^3)$

$u=x^3 \quad \Rightarrow \quad u'=3x^2$. Luego:

$$y'=-\frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^2)^2}}=-\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^4}}$$

17) $y=arc\left[tan(5x+8)\right]$

$u=5x+8 \quad \Rightarrow \quad u'=5$. Luego:

$$y' = \frac{5}{1+(5x+8)^2} = \frac{5}{1+25x^2+80x+64} = \frac{5}{25x^2+80x+65}$$

18) $y = arc\left[\cot(e^x)\right]$

$u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$. Luego:

$$y' = -\frac{e^x}{1+\left(e^x\right)^2} = -\frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

19) $y = arc(\sec 6x^4)$

$u = 6x^4 \quad \Rightarrow \quad u' = 24x^3$. Luego:

$$y' = \frac{24x^3}{6x^4\sqrt{(6x^4)^2-1}} = \frac{24x^4}{\sqrt{36x^8-1}}$$

20) $y = arc(\sec e^{9x-2})$

$u = e^{9x-2} \quad \Rightarrow \quad u' = 9e^{9x-2}$. Luego:

$$y' = \frac{9e^{9x-2}}{e^{9x-2}\sqrt{(e^{9x-2})^2-1}} = \frac{9e^{9x-2}}{e^{9x-2}\sqrt{e^{18x-4}-1}}$$

21) $f(x) = arc(cs\,\mathrm{c}\sqrt{x})$

$u = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Luego:

$$y' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$$

22) $f(x) = arcsen\left(\frac{4x-2}{7x+1}\right)$

$u = \frac{4x-2}{7x+1} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{(7x+1)(4)-(4x-2)(7)}{(7x+1)^2} = \frac{28x+4-28x+14}{(7x+1)^2} = \frac{18}{(7x+1)^2}$.

Luego:

$$y' = \frac{\frac{18}{(7x+1)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-2}{7x+1}\right)^2}} = \frac{18}{(7x+1)^2\sqrt{1-\left(\frac{4x-2}{7x+1}\right)^2}}$$

Ejemplos en donde se deriva una función elevada a otra función

23) $y=(senx)^x$

Para derivar este tipo de funciones, se aplicará el logaritmo natural en ambos lados de la función y se utiliza la tercera propiedad del logaritmo natural.

$\ln y=\ln(senx)^x$, se utiliza la propiedad 3 del logaritmo natural.

$\ln y=x\cdot\ln(senx)$, a continuación se obtiene la derivada en ambos lados:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=x\cdot\frac{1}{senx}\cos x+\ln(senx)$$

$$y'=y\left[x\cdot\frac{1}{senx}\cos x+\ln(senx)\right]$$

$$y'=(senx)^x\left[\frac{x\cos x}{senx}+\ln(senx)\right]$$

$$y'=(senx)^x\left[x\cot x+\ln(senx)\right]$$

24) $y=(\tan x)^{\sqrt{x}}$

Se aplica el logaritmo natural en ambos lados de la función.

$\ln y=\ln(\tan x)^{\sqrt{x}}$, se utiliza la propiedad 3 del logaritmo natural.

$\ln y=\sqrt{x}\cdot\ln(\tan x)$, a continuación se obtiene la derivada en ambos lados:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\tan x}\sec^2 x+\ln(\tan x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'=y\left[\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\tan x}\sec^2 x+\ln(\tan x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$y'=(\tan x)^{\sqrt{x}}\left[\cdot\frac{\sqrt{x}\cdot\sec^{2x}}{\tan x}+\frac{\ln(\tan x)}{2\sqrt{x}}\right]$$

7.6. Regla de la Cadena

En varios de los ejemplos trabajados con anterioridad, se utilizó de manera implícita la regla de la cadena. En esta sección se le dará formalidad a la Regla de la Cadena y se verá que la idea esencial es la misma que la ya trabajada.

Regla de la Cadena. Si u y v son funciones derivables y si $y = u \circ v$ es la función composición definida por $y(x) = u[v(x)]$, entonces "y" es derivable y su derivada se representa como

$$y'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$$

Ejemplos

Obtenga la derivada de las funciones que se dan, utilizando la regla de la cadena.

1) $y = sen(\cos x)$

$$v(x) = senx \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \cos x$$

$$y' = \cos(senx) \cdot \cos x$$

2) $y = \tan\left(e^{2x}\right)$

$$v(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 2e^{2x}$$

$$y' = \sec^2\left(e^{2x}\right) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x} \sec^2\left(e^{2x}\right)$$

3) $y = \sec(\ln x)$

$$v(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \tfrac{1}{x}$$

$$y' = \sec(\ln x)\tan(\ln x)\left(\tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{x}\sec(\ln x)\tan(\ln x)$$

4) $y = \cos^3\left(e^x\right)$

$$v(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = e^x$$

$$y' = 3\cos^2\left(e^x\right) \cdot \left[-sen\left(e^x\right)\right] \cdot e^x = -3e^x \cos^2\left(e^x\right) sen\left(e^x\right)$$

7.7. Derivadas de funciones implícitas

Recordemos que las funciones implícitas son aquellas en las que las variables "x" y la "y" se encuentran mezcladas, es decir, la variable "y" no se iguala con expresiones en las que interviene solo la variable "x". Para derivar dichas funciones se utiliza la derivación implícita. Esta consiste en derivar ambos miembros de la ecuación con respecto a "x", posteriormente se despeja "y'".

Ejemplos

Obtenga la derivada de las funciones implícitas que se dan:

1) $x^2 + y^2 = 1$

$$2x+2y\cdot y'=0$$
$$2y\cdot y'=-2x$$
$$y'=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

2) $2x^2y^2+xy=3x$

$$2x^2\cdot 2y\cdot y'+y^2\cdot 4x+x\cdot y'+y=3$$
$$2y\cdot y'+x\cdot y'=3-4x^2y-4xy^2-y$$
$$y'(2y+x)=3-4x^2y-4xy^2-y$$
$$y'=\frac{3-4x^2y-4xy^2-y}{2y+x}$$

3) $(2x+3y)^2=x+y$

$$2(2x+3y)(2+3y')=1+y'$$
$$(4x+6y)(2+3y')=1+y'$$
$$8x+12xy'+12y+18yy'=1+y'$$
$$12xy'+18yy'-y'=1-8x-12y$$
$$y'(12x+18y-1)=1-8x-12y$$
$$y'=\frac{1-8x-12y}{12x+18y-1}$$

4) $x\sqrt{1+2y}=x^3+y^3$

$$x(1+2y)^{\frac{1}{2}}=x^3+y^3$$
$$x\cdot\frac{1}{2}(1+2y)^{-\frac{1}{2}}(2y')+(1+2y)^{\frac{1}{2}}=3x^2+3y^2y'$$
$$\frac{xy'}{\sqrt{1+2y}}-3y^2y'=3x^2-\sqrt{1+2y}$$
$$y'\left(\frac{x}{\sqrt{1+2y}}-3y^2\right)=3x^2-\sqrt{1+2y}$$
$$y'=\frac{3x^2-\sqrt{1+2y}}{\frac{x}{\sqrt{1+2y}}-3y^2}$$

5) $sen(x+y)=y^2\tan x$

$$\cos(x+y)(1+y') = y^2 \sec^2 x + \tan x \cdot 2yy'$$

$$\cos(x+y) + y'\cos(x+y) - 2yy'\tan x = y^2 \sec^2 x$$

$$y'(\cos(x+y) - 2y\tan x) = y^2 \sec^2 x - \cos(x+y)$$

$$y' = \frac{y^2 \sec^2 x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\tan x}$$

6) $e^{xy} = \ln(xy)$

$$e^{xy}(xy'+y) = \frac{1}{xy}(xy'+y)$$

$$xy'e^{xy} + ye^{xy} = \frac{y'}{y} + \frac{1}{x}$$

$$xy'e^{xy} - \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - ye^{xy}$$

$$y'\left(xe^{xy} - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x} - ye^{xy}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} - ye^{xy}}{xe^{xy} - \frac{1}{y}}$$

7.8. Derivadas de orden superior

Se sabe que si la función $f(x)$ es una función derivable, su derivada la podemos representar por $f'(x)$. Ahora si la función $f'(x)$ se deriva nuevamente, dicha derivada se representa como: $[f'(x)]' = f''(x)$ a esta función se le llama Segunda Derivada de $f(x)$. De igual forma la función $f'''(x)$ es la tercera derivada de $f(x)$.

Ejemplos.

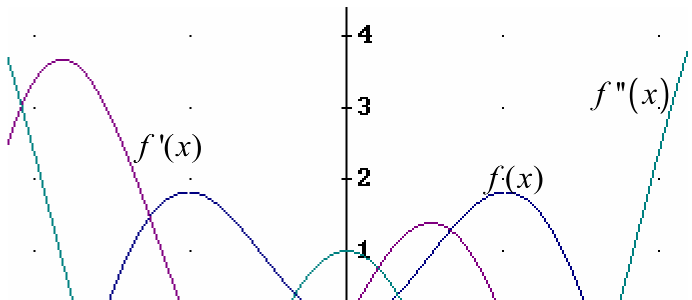
1) si $f(x) = xsenx$. Obtenga e interprete $f''(x)$.

Usando la derivada de un producto, obtenemos:

$f'(x) = x(senx)' + senx(x)' = x\cos x + senx$ y

$f''(x) = x(-senx) + \cos x = -xsenx + \cos x$

Las gráficas de las funciones $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ son:



Se puede interpretar $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. Dicho de otra forma, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$. En general se puede interpretar la segunda derivada como la razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido de esto es la aceleración que se define como sigue. Si $s = s(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, se sabe que su primera derivada indica la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t)$$

La razón instantánea de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama aceleración $g(t)$ del objeto. De esta forma, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, por tanto, es la segunda derivada de la función de posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

2) Supóngase que la función $s = t^3 - 4t^2 + 7t$, describe la posición de una partícula donde "t" se mide en segundos y "s" se mide en metros.
   a) Obtenga la aceleración en el instante "t". Obtenga la aceleración a los 5 segundos.
   b) Grafique la posición de la partícula, la velocidad y la aceleración.

   Respuesta:

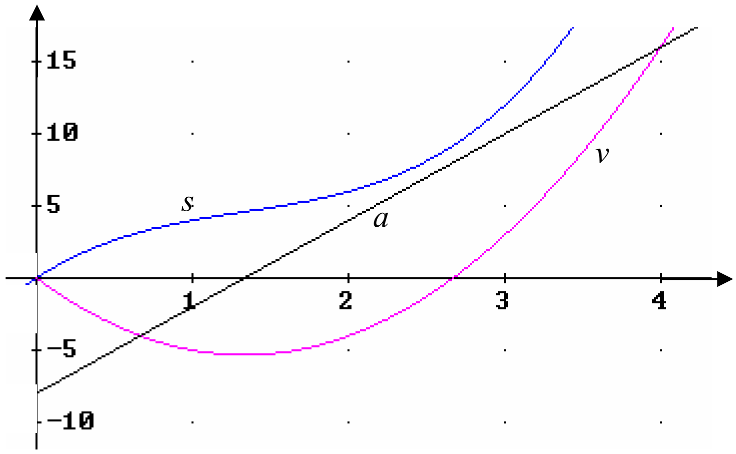
   a) Al derivar la función $s = f(t) = t^3 - 4t^2 + 7t$, se obtiene la velocidad, es decir: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 7$. Y la aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = v'(t) = 6t - 8$$

   A los 5 segundos la aceleración es:

$$a(5) = 6(5) - 8 = 30 - 8 = 22m/s^2$$

b) Las gráficas de las funciones s, v y a, se dan a continuación:



3) Si $f(x)=4x^4-2x^3+2x^2-x+3$. Obtenga: f', f'' y f'''.

$f'(x)=16x^3-6x^2+4x-1$

$f''(x)=48x^2-12x+4$

$f'''(x)=96x-12$

4) Si $f(x)=e^{2x}$. Obtenga: f^{v}.

$f'(x)=e^{2x}(2)=2e^{2x}$

$f''(x)=2e^{2x}(2)=4e^{2x}$

$f'''(x)=4e^{2x}(2)=8e^{2x}$

$f^{iv}(x)=8e^{2x}(2)=16e^{2x}$

$f^{v}(x)=16e^{2x}(2)=32e^{2x}$

5) Si $f(x)=senx$. Obtenga: $f^{(10)}$.

$f'(x)=\cos x$ $\quad$ $f''(x)=-senx$

$f'''(x)=-\cos x$ $\quad$ $f^{(4)}(x)=senx$

$f^{(5)}(x)=\cos x$ $\quad$ $f^{(6)}(x)=-senx$

$f^{(7)}(x)=-\cos x$ $\quad$ $f^{(8)}(x)=senx$

$f^{(9)}(x)=\cos x$ $\quad$ $f^{(10)}(x)=-senx$

7.9. Ejercicios

I) Obtenga la derivada de las funciones por medio de la definición.

1) $f(x)=2x^2$ $\qquad$ 2) $f(x)=3x^2-7$

3) $f(x)=x^2-3x-1$

4) $f(x)=9x^2-5x+4$

5) $f(x)=x^3-1$

6) $f(x)=2x^3-8$

7) $f(x)=x^3-2x+3$

8) $f(x)=\sqrt{x-3}$

9) $f(x)=\sqrt{3x+4}$

10) $f(x)=\sqrt{2-7x^2}$

11) $f(x)=\frac{1}{x}$

12) $f(x)=\frac{1}{x+2}$

13) $f(x)=\frac{3}{4x}$

14) $f(x)=\frac{7}{6x-10}$

15) $f(x)=\frac{11}{5-x}$

16) $f(x)=\frac{2x-2}{3x+2}$

II) Obtenga la derivada de las funciones que se dan:

1. $f(x)=10x$

2. $f(x)=5x^3$

3. $f(x)=6x^4-3x^2+4x-2$

4. $f(x)=7x^7+x^6-3x^3+8x-1$

5. $f(x)=\frac{1}{x}$

6. $f(x)=\frac{15}{x^6}$

7. $f(x)=\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-1$

8. $f(x)=\sqrt{x}$

9. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

10. $f(x)=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}$

11. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

12. $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{x^4}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x^3}}$

13. $y=(2x-3)^5$

14. $y=\left(8-x^2\right)^{10}$

15. $y=\sqrt{(4x-7)^3}$

16. $y=\sqrt[3]{\left(x^2+5x\right)^2}$

17. $y=\left(x^2-1\right)(2x-5)$

18. $y=(x-1)^3(2x+1)^4$

19. $y=\sqrt{x}(4x-1)^2$

20. $y=\sqrt{x^3}\left[\sqrt[5]{\left(1-x^2\right)^2}\right]$

21. $y=\dfrac{11x-4}{2x-7}$

22. $y=\dfrac{2x^4+1}{5-x^2}$

23. $y=\dfrac{\left(x^3+1\right)^2}{\sqrt{2x+1}}$

24. $y=\left(\dfrac{2x-3}{5-6x}\right)^3$

25. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

26. $y=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^3+2}{x^3-1}\right)^2}$

27. $y=\ln\left(x^2+1\right)$

28. $y=\ln(\ln x)$

29. $y=\ln^2(5x-4)$

30. $y=\ln^3\left(x^2+8\right)$

31. $y=\ln\left[(4x+1)(2x-7)\right]$

32. $y=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

33. $y=\ln\left(\dfrac{2-2x^2}{x^3-10}\right)$

34. $y=\ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)^6$

35. $y=\ln\left[\dfrac{(5x-1)^2(x+2)^3}{(1-x)^4}\right]$

36. $y=\ln\left(1-x-x^2\right)^7$

37. $y=\ln\left(x^5\ln x\right)$

38. $y=\ln\left[\sqrt[4]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\right]$

39. $y=e^{x^3}$

40. $y=e^{x^2\ln x}$

41. $y=e^{x/x-1}$

42. $y=\ln\left(e^x+e^{-3\ln x}\right)$

43. $y=5^{\sqrt{x}}$

44. $y=10^{x^2+2x-1}$

45. $y=15^{\ln x}$

46. $y=sen(7x+11)$

47. $y=sen(3x^2-16)$

48. $y=sen(\cos x)$

49. $y=sen^3(x+1)$

50. $y=\tan\left(1-x-x^2\right)$

51. $y=\tan^5(\cot x)$

52. $y=\sec x\tan x$

53. $y = sen^2 x + \cos^2 x$

54. $y = \csc x \sec x$

55. $y = \dfrac{1 - senx}{\tan x}$

56. $y = \sec^3 (\csc 2x)$

57. $y = x^x$

58. $y = x^{senx}$

59. $y = (\cos x)^{\tan x}$

60. $y = (\sec x)^{\sqrt{x}}$

61. $y = \dfrac{senx\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\tan^2 x}$

62. $y = \dfrac{\sec^2 x\sqrt{sen^2 x + 1}}{\cos^2 x \cdot \cot x}$

III) Obtenga la derivada de las funciones implícitas que se dan:

1. $x^2 y^3 + 3xy = x^4 + y^4$

2. $2x^4 y - 4x^2 y^2 = xy + 3$

3. $x^2 = \dfrac{2 + 2y}{x - 3y}$

4. $\dfrac{x}{x - y} = 2 + x^2$

5. $(x + 2y)^2 - (x - y)^2 = x^3 + y^3$

6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

7. $x\sqrt{3y - 2} + y\sqrt{2x + 1} = 0$

8. $(2x + 3)^4 = 4y^2 - 2x^3 y$

9. $x^y = y^x$

10. $sen\left(\dfrac{x}{y}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0$

11. $senx \cot y - 4\tan y = senx$

12. $\sec\left(\dfrac{x}{y}\right) + \csc\left(\dfrac{x}{y}\right) = 10$

IV) Obtenga la derivada de orden superior que se indican en cada caso.

1. $y = x^3 + 2x^2 - 2x - 6. \qquad y''.$

2. $y = 2x^4 - x^2 + 2x + 8. \qquad y'''.$

3. $y = \dfrac{1}{x} \qquad y^{(4)}.$

4. $y = \sqrt{x + 1}. \qquad y^{(3)}.$

5. $y = e^{x^2}. \qquad y^{(4)}.$

6. $y = \dfrac{3}{e^x}. \qquad y^{(8)}.$

7. $y = \ln x. \qquad y^{(5)}.$

8. $y = \cos x. \qquad y^{(15)}.$

9. $y = \tan x. \qquad y'''.$

10. $y = \sec x. \qquad y'''.$

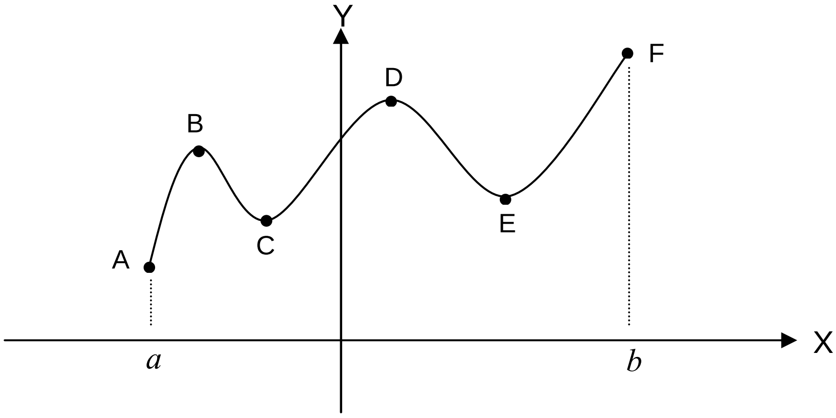
UNIDAD 8

APLICACIONES DE LA DERIVADA

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno será capaz de:

- ♦ Utilizar el concepto de la derivada para obtener la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a una curva en un punto.
- ♦ Utilizar la derivada para obtener los intervalos en donde una función es creciente o decreciente.
- ♦ Aplicar la derivada para obtener los puntos máximos, mínimos y de inflexión. Así como las concavidades y usará esta información para graficar una función.
- ♦ Evaluar límites por medio de la regla de L'Hospital.
- ♦ Plantear y resolver problemas usando la derivada de una función.



$y = f(x)$

8) APLICACIONES DE LA DERIVADA

8.1. Rectas tangentes y rectas normales

Antes de iniciar con ejemplos en donde se obtenga la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a una curva en un punto. Se recuerda que:

- La ecuación de una recta dado un punto y su pendiente es
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Las rectas perpendiculares son aquellas en las que el producto se sus pendientes es igual a –1; es decir, si l_1 y l_2 son rectas perpendiculares y m_1 y m_2 son sus pendientes, entonces
$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad o \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Observemos que las pendientes en las rectas perpendiculares son negativamente recíprocas.

- Las rectas tangentes y las rectas normales son perpendiculares.

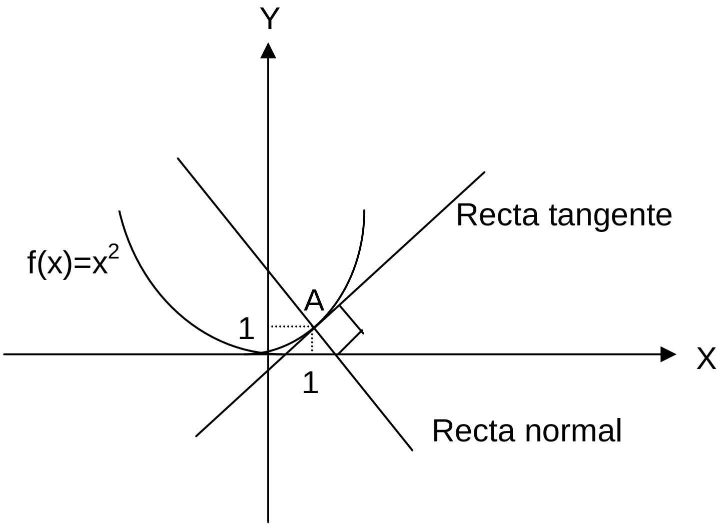
- La pendiente de una recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, es la derivada de la función evaluada en dicho punto.

Ejemplos.

Encuentre la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva en el punto indicado.

1) $f(x)=x^2$ en el punto A(1,1).

En primer lugar se traza un bosquejo geométrico de la curva y las rectas tangente y normal a la curva el punto A(1,1).



Para obtener la pendiente de la recta tangente se deriva la función $f(x)=x^2$ y se evalúa el punto indicado.

$$m(x_1)=f'(x_1)=2x_1$$

al sustituir en el punto A(1,1), obtenemos que:

$$m(x_1)=m(1)=2(1)=2$$

luego la recta tangente tiene pendiente 2 y pasa por el punto A(1,1). Al sustituir en la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$, se obtiene:

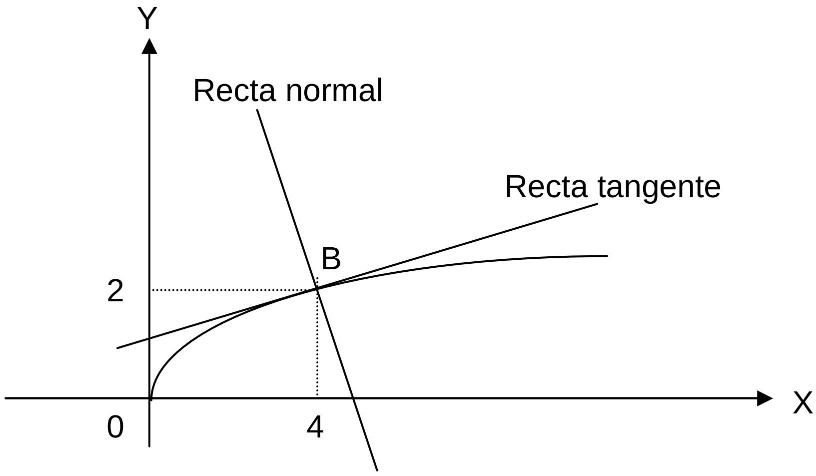
$$y-1=2(x-1)$$
$$y-1=2x-2$$
$$\boxed{-2x+y+1=0}$$

Para la recta normal $m=-\frac{1}{2}$ y el punto es A(1,1). Nuevamente sustituimos en la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$ y se obtiene:

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$
$$2(y-1)=-(x-1)$$
$$2y-2=-x+1$$
$$\boxed{x+2y-3=0}$$

2) $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto B(4,2).

Se inicia nuevamente con una interpretación geométrica en la que se muestra la curva, la recta tangente y la recta normal.



De nueva cuenta, para obtener la pendiente de la recta tangente se deriva la función $f(x)=\sqrt{x}$ y se evalúa el punto indicado.

$$m(x_1)=f'(x_1)=\frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x_1}} \quad \Rightarrow \quad m(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

luego la recta tangente tiene pendiente $\frac{1}{4}$ y pasa por el punto B(4,2). Al sustituir en la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$, se obtiene:

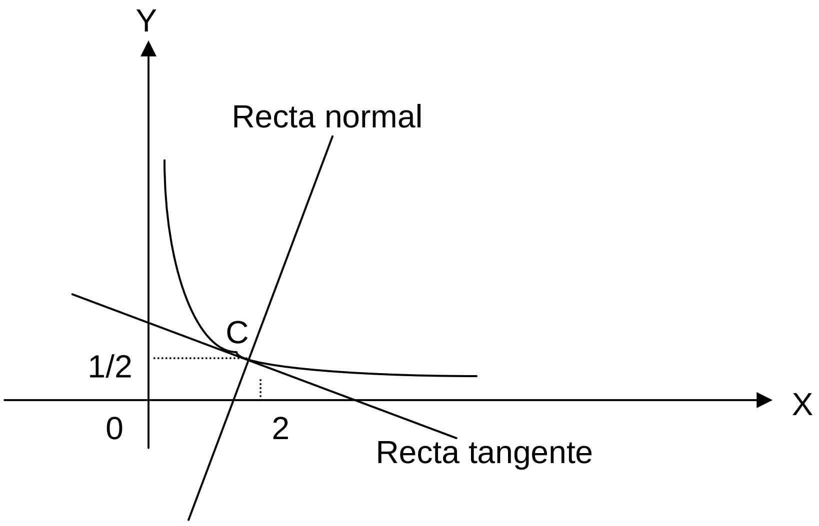
$$y-2=\frac{1}{4}(x-4)$$
$$4(y-2)=x-4$$
$$4y-8=x-4$$
$$\boxed{-x+4y-4=0}$$

Para la recta normal $m=-4$ y el punto es B(4,2). Nuevamente sustituimos en la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$ y se obtiene:

$$y-2=-4(x-4)$$
$$y-2=-4x+16$$
$$\boxed{4x+y-18=0}$$

3) $f(x)=\frac{1}{x}$ en el punto $C\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

En primer lugar se muestra una gráfica ilustrativa.



Nuevamente se utiliza el mismo proceso; es decir:

$$m(x_1)=\left(-1\right)x_1^{-2}=-\frac{1}{x_1^{\,2}}$$

al sustituir en el punto $C\left(2,\frac{1}{2}\right)$, obtenemos que:

$$m(x_1)=m(2)=-\frac{1}{4}$$

luego la recta tangente tiene pendiente $-\frac{1}{4}$ y pasa por el punto $C\left(2,\frac{1}{2}\right)$. Al sustituir en la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$, se obtiene:

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)$$

$$4\left(y-\frac{1}{2}\right)=-(x-2)$$

$$4y-2=-x+2$$

$$\boxed{x+4y-4=0}$$

Para la recta normal $m=4$ y el punto es $C\left(2,\frac{1}{2}\right)$. Nuevamente sustituimos en la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$ y se obtiene:

$$y-\frac{1}{2}=4(x-2)$$

$$y-\frac{1}{2}=4x-8$$

$$2y-1=8x-16$$

$$\boxed{-8x+2y+15=0}$$

4) $3x^4y^3-7xy^4=4-8y$ en el punto $D\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Se deriva la función implícita y se evalúa en el punto indicado.

$$3x^4\left(3y^2\cdot y'\right)+y^3\left(12x^3\right)-7x\left(4y^3\cdot y'\right)-y^4\left(7\right)=-8y'$$

$$9x^4y^2y'+12x^3y^3-28xy^3y'-7y^4=-8y'$$

$$y'\left(9x^4y^2-28xy^3+8\right)=7y^4-12x^3y^3$$

$$y'=\frac{7y^4-12x^3y^3}{9x^4y^2-28xy^3+8}$$

Luego $m\left(0,\frac{1}{2}\right)=\dfrac{7\left(\frac{1}{2}\right)^4-12\left(0\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3}{9\left(0\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2-28\left(0\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3+8}=\dfrac{7\left(\frac{1}{16}\right)}{8}=\dfrac{7}{128}$.

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y-\frac{1}{2}=\frac{7}{128}\left(x-0\right)$$

$$128\left(y-\frac{1}{2}\right)=7x$$

$$128y-64=7x$$

$$\boxed{-7x+128y-64=0}$$

Y la ecuación de la recta normal es:

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{128}{7}\left(x-0\right)$$

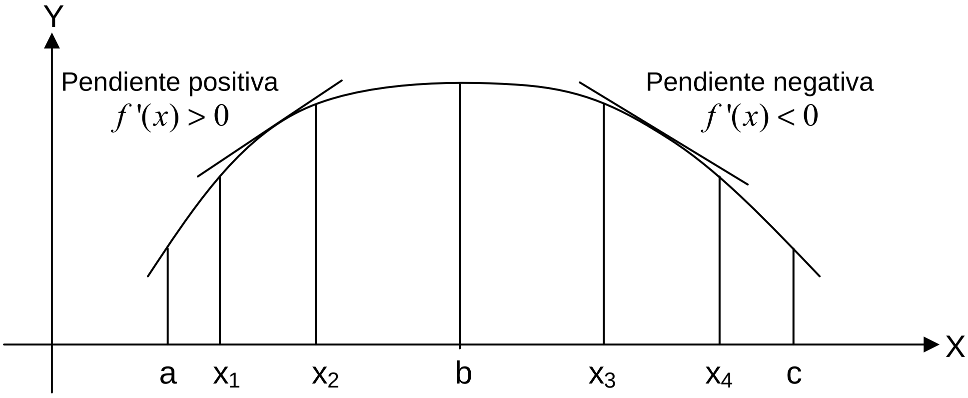
$$7\left(y-\frac{1}{2}\right)=-128x$$

$$7y-\frac{7}{2}=-128x$$

$$\boxed{128x+7y-\frac{7}{2}=0}$$

8.2. Funciones crecientes y decrecientes

En primer lugar analizaremos la gráfica de la función $y = f(x)$, que se muestra en seguida:



$y = f(x)$

En la gráfica observamos que $x_1 < x_2$ y que $f(x_1) < f(x_2)$, además observamos que $x_3 < x_4$ y que $f(x_3) > f(x_4)$. En general se afirma que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$, para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 en el intervalo I_1. Se dice que $y = f(x)$ es creciente en dicho intervalo. De forma análoga se dice que $y = f(x)$ es decreciente en el intervalo I_2, si para cualesquiera dos puntos x_3 y x_4 en el intervalo I_2, si $x_3 < x_4$, entonces $f(x_3) > f(x_4)$.

En la gráfica planteada se deduce que $y = f(x)$ es creciente en el intervalo (a,b) y es decreciente en el intervalo (b,c). Además en el intervalo (a,b), las líneas tangentes a la curva tienen pendientes positivas; es decir: $f'(x) > 0$. Y en el intervalo (b,c) las líneas tangentes a la curva tienen pendientes negativas; es decir: $f'(x) < 0$. Tomando como base estas observaciones, podemos enunciar una regla en la que al usar la derivada de una función sepamos cuando una función es creciente o decreciente.

Regla para funciones crecientes y decrecientes.
Supongamos que $f(x)$ es derivable en el intervalo (a,b). Si $f'(x) > 0$ para toda x en dicho intervalo, entonces $f(x)$ es creciente en (a,b). Si $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo, entonces $f(x)$ es decreciente en (a,b).

Ejemplos

Para cada una de las funciones que se indican, use la derivada de la función y obtenga los intervalos en donde la función es creciente o decreciente.

1. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$

$f'(x) = 3x^2 + 12x$

Ahora para obtener los valores que forman los intervalos en donde la función es creciente o decreciente, se iguala la derivada con cero:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12x &= 0 \quad \text{se divide entre 3.} \\ x^2 + 4x &= 0 \quad \text{se factoriza.} \\ x(x+4) &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $x = 0$ y $x = -4$. Estos valores forman los intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$ y $(0, \infty)$. Con el fin de obtener el signo de la derivada $f'(x) = 3x^2 + 12x$, se evalúa en valores que están en cada intervalo.

Si $x = -5 \quad \Rightarrow \quad f'(-5) = 3(-5)^2 + 12(-5) = 75 - 60 = 15 > 0$

Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -4)$.

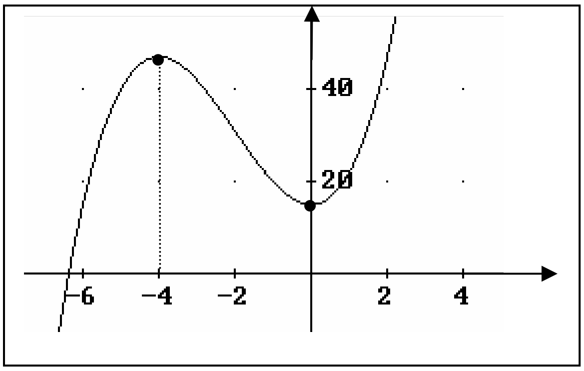
Si $x = -2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) = 12 - 24 = -12 < 0$

Por lo tanto, la función es decreciente en el intervalo $(-4, 0)$.

Y si $x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 3(1)^2 + 12(1) = 3 + 12 = 15 > 0$

Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

La gráfica de la función en donde se ilustra lo anterior es:



$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$

2. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 18x$

$f'(x) = -2x^2 + 18$

De nuevo se iguala la derivada con cero:

$$-2x^2 + 18 = 0 \quad \text{se divide entre -2.}$$
$$x^2 - 9 = 0 \quad \text{se factoriza.}$$
$$(x-3)(x+3) = 0$$

de donde se obtiene que $x=-3$ y $x=3$. Estos valores forman los intervalos $(-\infty,-3)$, $(-3,3)$ y $(3,\infty)$. Ahora para obtener el signo de la derivada $f'(x) = -2x^2 + 18$, se evalúa en valores que están en cada intervalo.

Si $x=-4 \quad \Rightarrow \quad f'(-4) = -2(-4)^2 + 18 = -32 + 18 = -14 < 0$

Por lo tanto, la función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-3)$.

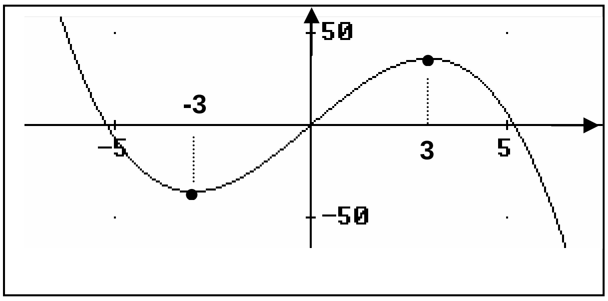
Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2(0)^2 + 18 = 18 > 0$

Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo $(-3,3)$.

Y si $x=4 \quad \Rightarrow \quad f'(4) = -2(4)^2 + 18 = -32 + 18 = -14 < 0$

Por lo tanto, la función es decreciente en el intervalo $(3,\infty)$.

Gráfica ilustrativa de $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 18x$



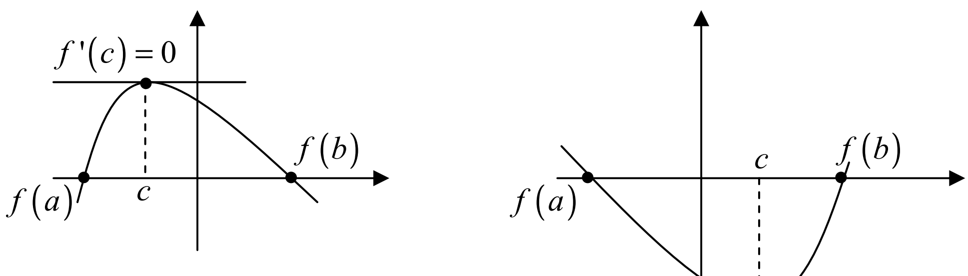
8.3. Teorema de Rolle y teorema del valore medio

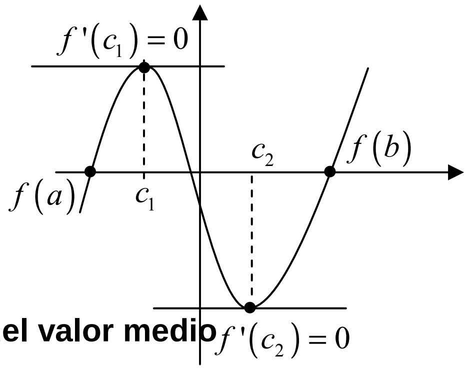
En estos teoremas también se continúa usando la derivada de una función.

Teorema de Rolle

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y $f(a) = f(b) = 0$ entonces existe al menos un número c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

Una descripción geométrica en la que se cumplen las condiciones de este teorema es:

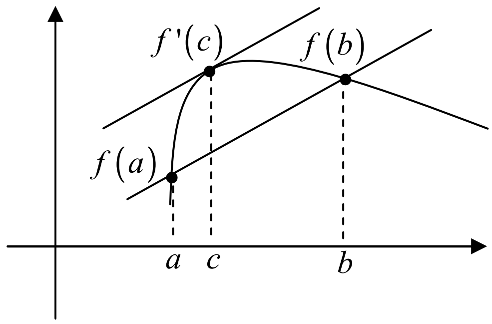




Teorema del valor medio

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a,b) entonces existe un número c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Descripción geométrica en la que se ilustra el teorema del valor medio.



Ejemplos.

1. Si $f(x)=x^2-9$, verificar que se cumplen las condiciones del teorema de Rolle para el intervalo $[-3,3]$ y encontrar un valor adecuado de c en dicho intervalo tal que $f'(c)=0$.

   Como $f(x)=x^2-9$ está definida para cualquier valor de x, entonces es continua en el intervalo $[-3,3]$ y $f'(x)=2x$ también está definida en todos los reales, luego $f(x)$ es diferenciable en el intervalo $(-3,3)$.

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 3$$

Luego el teorema se cumple para $a=-3 \quad y \quad b=3$ en el Intervalo $[-3,3]$. Obtengamos el valor de c.

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0.$$

Por lo tanto $c=0$.

2. Si $f(x)=3-\frac{6}{x}$. Obtenga el valor de c en el intervalo $(2,6)$ tal que $f'(c)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}$.

Solución:

$$\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{2+0}{4}=\frac{1}{2}.$$

Dado que la función satisface las condiciones del teorema del valor medio, existe al menos un número c en el intervalo $(2,6)$ tal que $f'(c)=\frac{1}{2}$.

$$f'(x)=\frac{6}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2=12 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{12}$$

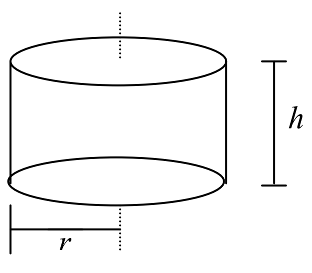
Finalmente en el intervalo $(2,6)$ elegimos $c=\sqrt{12}$.

8.4. Máximos y mínimos

El problema de la lata de aceite

Supóngase que una empresa necesita fabricar latas de aceite en la forma de un cilindro recto y éstas deben almacenar un litro (1000 cm^3) de aceite. ¿Cuáles serán las dimensiones que debe tener la lata, de forma tal que requiera la mínima cantidad de lámina para su fabricación?.

Para fabricar la lata de aceite es necesario conocer dos de sus dimensiones, éstas son el radio de la lata y la altura. Supongamos que r representa el radio y que h representa la altura, medidas en centímetros.



Se sabe que el volumen de un cilindro recto de dichas dimensiones se representa como:

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

Además como la lata debe contener un litro de aceite exactamente, entonces el volumen debe ser de 1000 cm^3, de donde:

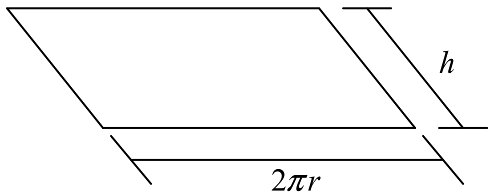
$$1000 = \pi r^2 h$$

ahora se observa que la altura h se puede representar en términos del radio r, es decir:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

como el objetivo es usar la menor cantidad de lámina para elaborar la lata de aceite, se debe obtener el valor del radio r de forma tal que el área de la superficie sea la mínima.

En la lata de aceite se observa que la tapa y el fondo, son círculos de la misma área, de donde se obtiene que el área del fondo y de la tapa es πr^2. Para hallar el área lateral de la lata, podemos cortarla sin considerar la tapa ni el fondo, desde arriba hasta abajo y después se aplana, de esta manera se forma una lámina rectangular en la que uno de sus lados corresponde a la altura h, de la lata y el otro lado mide $2\pi r$ que corresponde al perímetro de los círculos de la tapa y el fondo, como se indica en seguida:



El área este rectángulo es: $2\pi rh$ y corresponde al área lateral de la lata. Finalmente el área total de la superficie de la late es:

Área de la superficie = área de la tapa + área del fondo + área lateral

Área de la superficie = $\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh$.

Recordemos que $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$, luego entonces:

Área de la superficie = $2\pi r^2 + 2\pi r\left(\dfrac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$,

La cuál podemos representarla como:

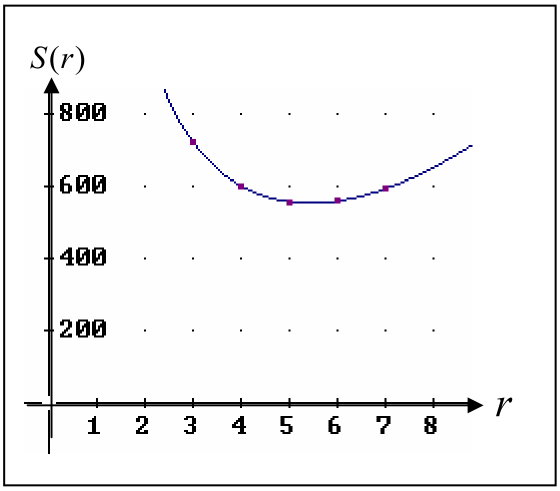
$$\text{Área de la superficie} = \frac{2\pi r^3 + 2000}{r}$$

Si suponemos que el Área de la superficie se representa por $S(r)$, entonces:

$$S(r) = \frac{2\pi r^3 + 2000}{r}$$

en esta ecuación observamos que r es la variable y que debe tomar valores acordes con las condiciones del problema, luego entonces $r > 0$. Ahora para observar como cambia el área de la superficie, se construye una tabla en la que a r se le asignan los valores 3, 4, 5, 6 y 7.

r	$S(r)$
3	723.21
4	600.53
5	557.07
6	559.52
7	593.59

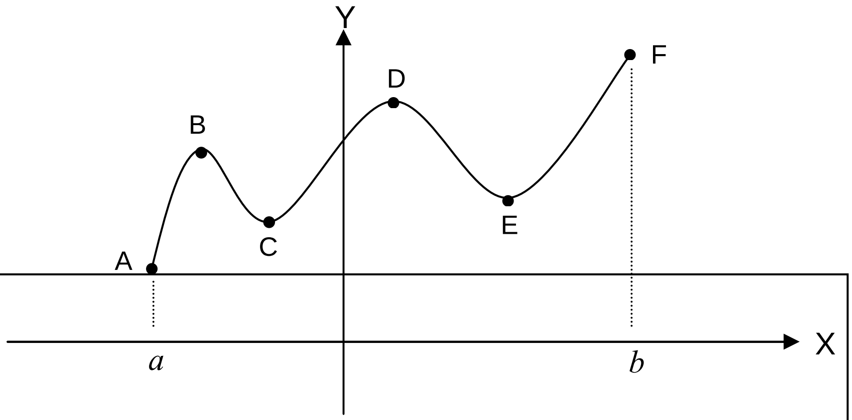


Puede ocurrir que en la tabla no se encuentre la solución al problema de la lata de aceite, pero al menos nos ayuda para hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la fórmula del área de la superficie. Ahora es necesario encontrar las coordenadas del punto que está más bajo de la gráfica, la primera coordenada del punto nos indica el valor del radio r y la segunda coordenada indica el valor numérico del área de la superficie. Para este problema, puede ocurrir al menos de manera aproximada que el punto sea (5, 557.07).

En este caso el punto que se busca se encuentra precisamente, donde la tangente a la gráfica es horizontal. Sin ayuda del cálculo no podemos avanzar en la solución de este problema. Sin embargo, con lo planteado hasta del momento, es fácil darnos cuenta que la fase inicial de nuestro trabajo consiste en encontrar tangentes a las curvas en diferentes puntos.

A continuación se inicia con los conceptos del Cálculo Diferencial, que son necesarios para resolver este problema y muchos otros relacionados sobre todo con máximos y mínimos.

Supongamos que la gráfica de la función $y = f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$ es:



$y = f(x)$

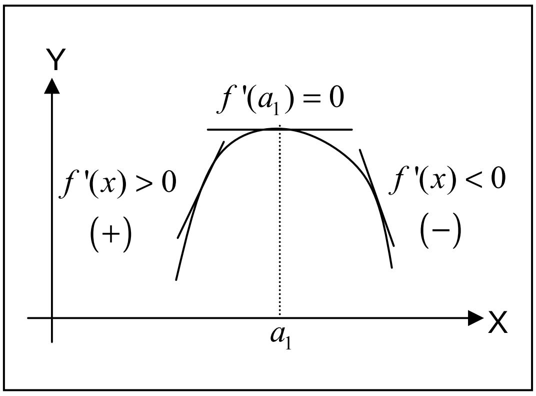
En esta gráfica observamos que el punto B, está más alto que cualquier otro punto cercano sobre la curva y esto mismo ocurre con los puntos D y F. También se observa que los puntos A, C y E, están más bajos que cualquier otro punto cercano a cada punto mencionado, sobre la curva. Cuando esto ocurre se dice que la función tiene máximos relativos en los puntos B y D, y un máximo absoluto en el punto F. Además tiene mínimos relativos en los puntos C y E, y un mínimo absoluto en el punto A. Observemos que el máximo absoluto es el punto más alto de la función en todo el intervalo $[a,b]$ y que el mínimo absoluto es el punto más bajo de la función en todo el intervalo $[a,b]$. Para formalizar estas ideas se da la definición siguiente:

Definición

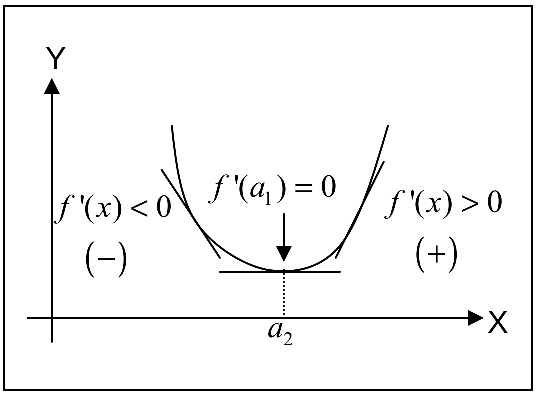
Una función $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = c$ si para todos los valores de x cercanos al punto c, se cumple que $f(c) \geq f(x)$. La función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = c$ si para todos los valores de x cercanos al punto c, se cumple que $f(c) \leq f(x)$. Si c está en el intervalo cerrado $[a,b]$. La función $f(x)$ tiene un máximo absoluto en $x = c$, si para todos los valores x que están en el intervalo $[a,b]$, se cumple que $f(c) \geq f(x)$. De igual forma, si c está en el intervalo cerrado $[a,b]$. La función $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x = c$, si para todos los valores x que están en el intervalo $[a,b]$, se cumple que $f(c) \leq f(x)$.

8.5. Criterio de la Primera Derivada

Consideremos una función $f(x)$ en un valor $x=a$ para el cual $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas. En secciones anteriores cuando se trabajaron los intervalos en los que una función es creciente o decreciente, geométricamente se observó que si en $x=a$ existe un máximo relativo de $f(x)$, entonces $f'(x)$ cambian de positiva a negativa en cuanto x pasa por el punto $x=a$; análogamente , si en $x=a$ existe un mínimo relativo de $f(x)$, entonces $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en cuanto x pasa por el punto $x=a$. A continuación se dan dos gráficas donde se ilustra lo anterior.



Máximo relativo



Mínimo relativo

Resumen del Criterio de la Primera Derivada

Si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en $x=a$ y si $f'(a)=0$, entonces:

- Cuando $f'(x)$ cambia de (+) a (-) al pasar por $x=a$ entonces en $x=a$ existe un máximo relativo.
- Cuando $f'(x)$ cambia de (-) a (+) al pasar por $x=a$ entonces en $x=a$ existe un mínimo relativo.
- Y si $f'(x)$ cambia de (+) a (+) o de (-) a (-) al pasar por $x=a$ entonces

Observación.

Mediante este procedimiento se obtienen los máximos y mínimos relativos que ocurren en valores de x para los cuales $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas. Máximos y mínimos relativos que ocurren en valores de x para los cuales $f'(x)$ no es continua se discuten en el ejemplo 3.

Ejemplos

Obtenga los puntos máximos relativos, mínimos relativos, intervalos en donde la función es creciente o decreciente y trace un bosquejo de su gráfica.

1. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$

En primer lugar se obtienen los valores críticos y esto se logra al derivar la función e igualarla con cero.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 12x \\ 3x^2 + 12x &= 0 \quad \text{se divide entre 3.} \\ x^2 + 4x &= 0 \quad \text{se factoriza.} \\ x(x+4) &= 0 \\ \therefore \quad x = 0 \quad &\text{y} \quad x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4 \end{aligned}$$

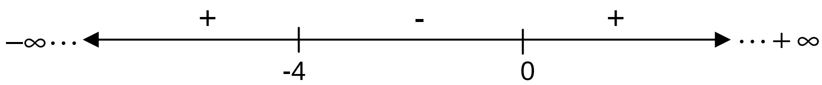
de donde se obtiene que $x = 0$ y $x = -4$ son los valores críticos. Estos valores forman los intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$ y $(0, \infty)$. Con el fin de obtener el signo de la derivada de la función $f'(x) = 3x^2 + 12x$, se evalúa en valores que están en cada intervalo.

Si $x = -5 \quad \Rightarrow \quad f'(-5) = 3(-5)^2 + 12(-5) = 75 - 60 = 15 > 0$

Si $x = -2 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) = 12 - 24 = -12 < 0$

Y si $x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 3(1)^2 + 12(1) = 3 + 12 = 15 > 0$

Signos de $f'(x)$



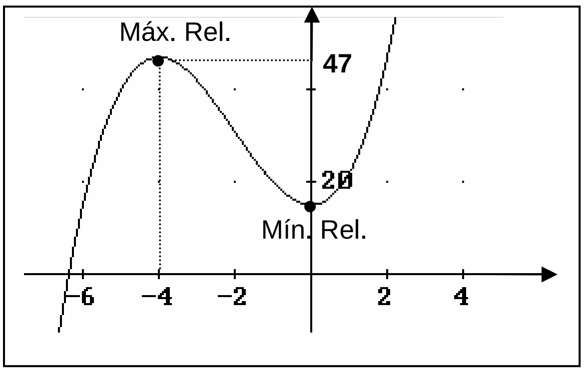
Por lo tanto en $x = -4$ existe un máximo relativo y en $x = 0$ hay un mínimo relativo. Además en los intervalos $(-\infty, -4)$ y $(0, +\infty)$ es creciente y en el intervalo $(-4, 0)$ es decreciente. Para trazar la gráfica se evalúa la función en cada punto obtenido.

Si $x = -4 \quad \Rightarrow \quad f(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 + 15 = -64 + 96 + 15 = 47$

Por lo tanto $(-4, 47)$ es un máximo relativo

Y si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = (0)^3 + 6(0)^2 + 15 = 0 + 0 + 15 = 15$

Por lo tanto $(0, 15)$ es un mínimo relativo



$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$

2. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 18x$

De nueva cuenta se obtienen los valores críticos

$$f'(x) = -2x^2 + 18$$
$$-2x^2 + 18 = 0 \quad \text{se divide entre -2.}$$
$$x^2 - 9 = 0 \quad \text{se factoriza.}$$
$$(x-3)(x+3) = 0$$
$$\therefore \quad x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \text{y} \quad x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

de donde se obtiene que $x = -3$ y $x = 3$ son los valores críticos. Estos valores forman los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, \infty)$. Con el fin de obtener el signo de la derivada de la función $f'(x) = -2x^2 + 18$, se evalúa en valores que están en cada intervalo.

Si $x = -4 \quad \Rightarrow \quad f'(-4) = -2(-4)^2 + 18 = -32 + 18 = -14 < 0$

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -2(0)^2 + 18 = 18 > 0$

Y si $x = 4 \quad \Rightarrow \quad f'(4) = -2(4)^2 + 18 = -32 + 18 = -14 < 0$

Signos de $f'(x)$

$$-\infty \cdots \longleftarrow \overset{-}{} \underset{-3}{|} \overset{+}{} \underset{3}{|} \overset{-}{} \longrightarrow \cdots +\infty$$

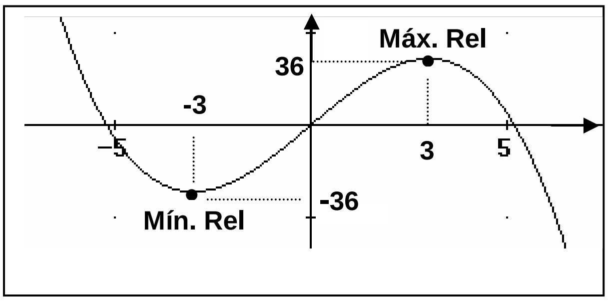
Por lo tanto en $x = -3$ existe un mínimo relativo y en $x = 3$ hay un máximo relativo. Además en los intervalos $(-\infty, -3)\ y\ (3, +\infty)$ es decreciente y en el intervalo $(-3, 3)$ es creciente. Para trazar la gráfica se evalúa la función en cada punto obtenido.

Si $x = -3 \quad \Rightarrow \quad f(-3) = -\frac{2}{3}(-3)^3 + 18(-3) = 18 - 54 = -36$

Por lo tanto $(-3, -36)$ es un mínimo relativo

Y si $x = 3 \quad \Rightarrow \quad f(0) = -\frac{2}{3}(3)^3 + 18(3) = -18 + 54 = 36$

Por lo tanto $(3, 36)$ es un máximo relativo



$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 18x$

3. $f(x) = -x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$

Primero se obtienen los valores críticos

$$f'(x) = -\tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \tfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$-\tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$$

$$\frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$10 = \tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$10 = 5x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 5x$$

$$\therefore \quad 10 = 5x \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{5} = x \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

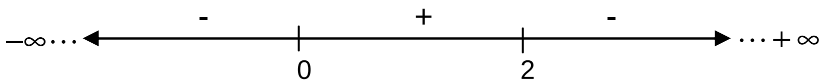
Además la derivada $f'(x) = -\tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{10}{3x^{\frac{1}{3}}}$, no está definida para $x = 0$ y como $f(x) = -x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$, si está definida en $x = 0$ (esto indica que la gráfica de la función tiene un pico en $x = 0)$, entonces los valores críticos son: $x = 2$ y $x = 0$. Estos valores forman los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$. Ahora se evalúa $f'(x) = -\tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{10}{3x^{\frac{1}{3}}}$ para valores de x en cada intervalo con el fin de obtener el signo de la derivada.

Si $x = -1 \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = -\dfrac{5}{3}(-1)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{10}{3(-1)^{\frac{1}{3}}} = -\dfrac{5}{3} - \dfrac{10}{3} = -\dfrac{15}{5} = -3 < 0$

Si $x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\dfrac{5}{3}(1)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{10}{3(1)^{\frac{1}{3}}} = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{5} > 0$

Y si $x = 3 \quad \Rightarrow \quad f'(3) = -\dfrac{5}{3}(3)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{10}{3(3)^{\frac{1}{3}}} = -\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{9} + \dfrac{10}{3\sqrt[3]{3}} = -3.466 + 2.311 < 0$

Signos de $f'(x)$



Por lo tanto en $x=0$ existe un mínimo relativo y en $x=2$ hay un máximo relativo. Además en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(2,+\infty)$ es decreciente y en el intervalo $(0,2)$ es creciente. Para trazar la gráfica se evalúa la función en cada punto obtenido.

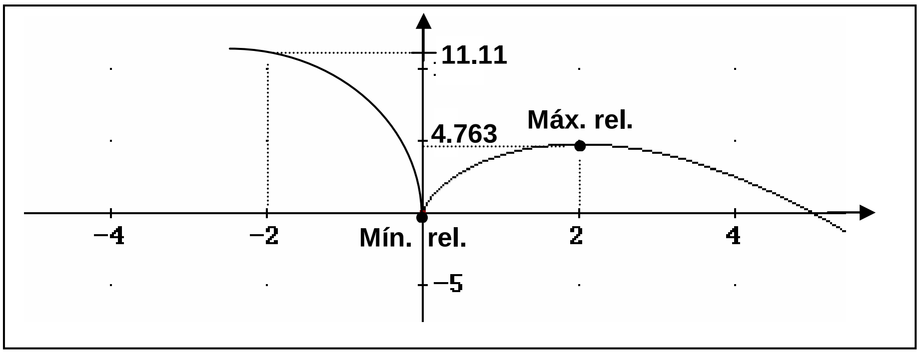
Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad f(0)=-(-0)^{\frac{5}{3}}+5(0)^{\frac{2}{3}}=-0+0=0$

Por lo tanto $(0,0)$ es un mínimo relativo

Y si $x=2 \quad \Rightarrow$

$$f(2)=-(2)^{\frac{5}{3}}+5(2)^{\frac{2}{3}}=-\sqrt[3]{2^5}+5\sqrt[3]{2^2}=-\sqrt[3]{32}+5\sqrt[3]{4}=-3.174+7.937$$
$$=4.763$$

Por lo tanto $(2,4.763)$ es un máximo relativo

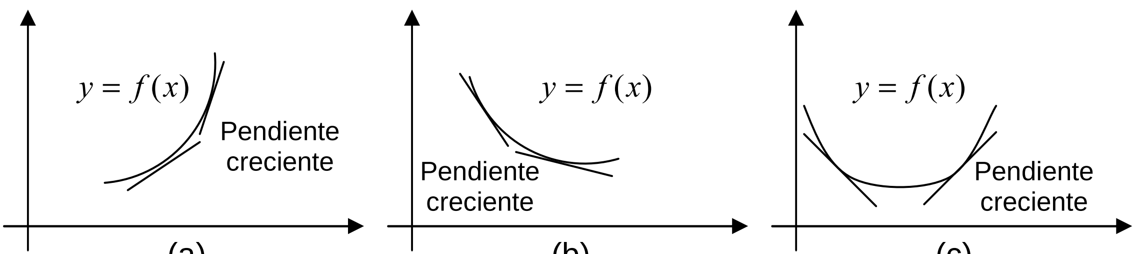


$f(x)=-x^{\frac{5}{3}}+5x^{\frac{2}{3}}$

8.6. Criterio de la Segunda Derivada, Concavidades y Puntos de Inflexión

8.6.1. Concavidades

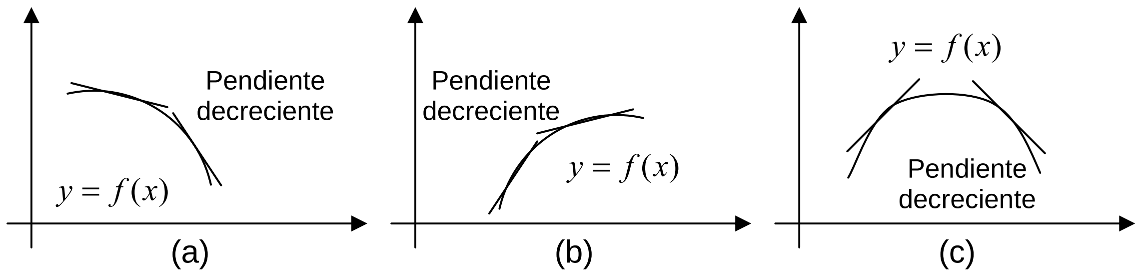
Hemos observado que la primera derivada brinda información muy útil para el trazado de gráficas. Se usa para obtener los intervalos en donde la función es creciente o decreciente. Sin embargo, para conocer la verdadera forma de una curva necesitamos más información. Para tal efecto se consideran las tres curvas que se muestran:



(a) (b) (c)

Observemos que estas figuras abren hacia arriba. Esto significa que si se trazan rectas tangentes a cada curva, las curvas quedan por arriba de éstas. También las pendientes de las líneas tangentes crecen en cada valor al crecer x. En la figura (a) las pendientes parten de valores positivos pequeños y aumentan; en la figura (b) se inicia con pendientes negativas y éstas se acercan a cero y en la figura (c) las pendientes pasan de valores negativos a positivos. Ahora dado que $f'(x)$ indica la pendiente en un punto, una pendiente creciente significa que $f'(x)$ es una función creciente. Cuando ocurre lo anterior, se dice que la curva es cóncava hacia arriba.

De igual forma para describir curvas que sean cóncavas hacia abajo, se plantean tres figuras que abren hacia abajo:



En cada una de éstas, las curvas están en la parte inferior de las líneas tangentes y cuando x crece, las pendientes de las líneas tangentes son decrecientes. De esta forma se dice que $f'(x)$ es una función decreciente y esto ocasiona que sea cóncava hacia abajo.

Definición
Supongamos que $f(x)$ es derivable en el intervalo (a,b). Se dice que $f(x)$ es **cóncava hacia arriba** en el intervalo (a,b), si $f'(x)$ es creciente en dicho intervalo y es **cóncava hacia abajo**, si $f'(x)$ es decreciente en el intervalo (a,b).

Recuerde que si $f'(x) > 0$ en el intervalo (a,b), entonces $f(x)$ es creciente en el mismo intervalo y si $f'(x) < 0$ en el intervalo (a,b), entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo (a,b). De la misma forma si $f''(x) > 0$ en el intervalo (a,b), entonces $f'(x)$ es creciente y si $f''(x) < 0$ en el intervalo (a,b), entonces $f'(x)$ es decreciente en el intervalo (a,b). A partir de estas afirmaciones, se enuncia el criterio siguiente.

Criterio de concavidad

Sea $f'(x)$ derivable en el intervalo (a,b). Se dice que $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo (a,b), si $f''(x) > 0$ para toda x en dicho intervalo. Y es cóncava hacia abajo en el intervalo (a,b), si $f''(x) < 0$ para toda x en el mencionado intervalo.

Ejemplos

Obtenga los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo. Use el criterio de concavidad.

1. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$

Para obtener los posibles intervalos, se encuentra la segunda derivada de la función y se iguala con cero.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x$$
$$f''(x) = 6x + 12$$

$$6x + 12 = 0$$
$$6x = -12$$
$$\therefore \quad x = -2$$

de donde se obtiene que $x = -2$. Este valor forma los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-2, \infty)$. Con el fin de obtener el signo de $f''(x) = 6x + 12$, se evalúa en valores que están en cada intervalo.

Si $x = -3 \quad \Rightarrow \quad f''(-3) = 6(-3) + 12 = -18 + 12 = -6 < 0$

Por lo tanto, la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, -2)$.

Y si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 6(0) + 12 = 0 + 12 = 12 > 0$

Por lo tanto, la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-2, +\infty)$.

2. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$

Para obtener los posibles intervalos, se encuentra la segunda derivada de la función y se iguala con cero.

$$f'(x) = 3x - x^3$$
$$f''(x) = 3 - 3x^2$$

$$3 - 3x^2 = 0 \quad \text{se divide entre 3.}$$
$$1 - x^2 = 0 \quad \text{se factoriza.}$$
$$(1 - x)(1 + x) = 0$$
$$\therefore \quad x = -1 \quad \text{y} \quad x = 1$$

de donde se obtiene que $x=-1$ y $x=1$. Estos valores forman los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,\infty)$. Con el fin de obtener el signo de $f''(x)=3-3x^2$, se evalúa en valores que están en cada intervalo.

$$\text{Si } x=-2 \quad \Rightarrow \quad f''(-2)=3-3(-2)^2=3-12=-9<0$$

Por lo tanto, la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty,-1)$.

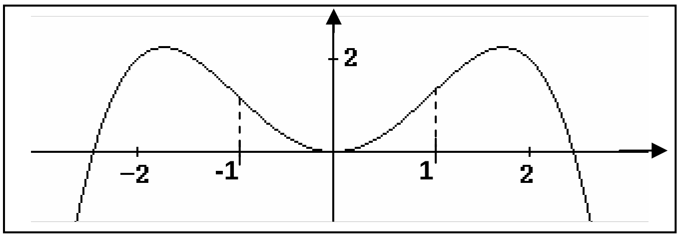
$$\text{Si } x=0 \quad \Rightarrow \quad f''(0)=3-3(0)^2=3>0$$

Por lo tanto, la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1,1)$.

$$\text{Y si } x=2 \quad \Rightarrow \quad f''(2)=3-3(2)^2=3-12=-8<0$$

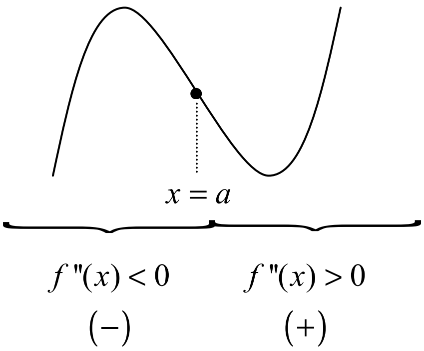
Por lo tanto, la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(1,+\infty)$.

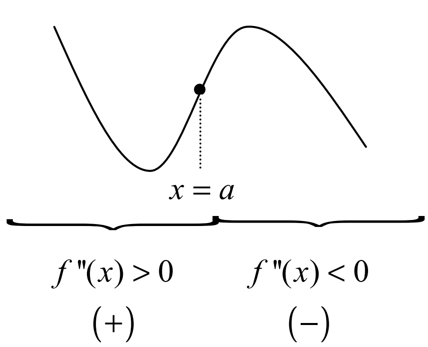
Gráfica ilustrativa de la función $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4$.

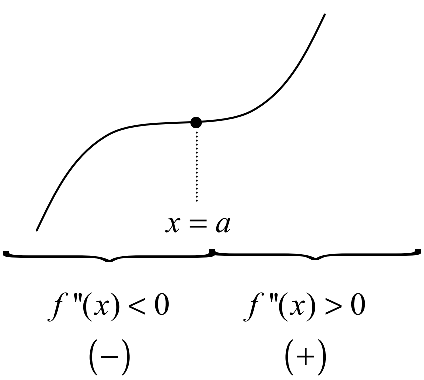


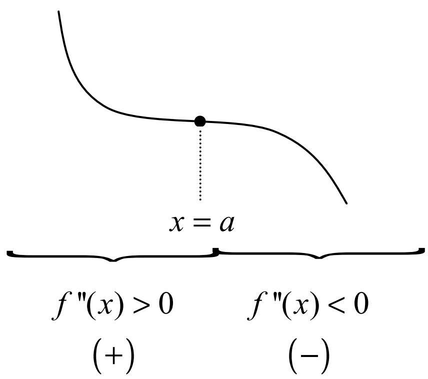
8.6.2. Puntos de Inflexión

Un punto sobre una gráfica, es de inflexión, si en dicho punto existe un cambio en la concavidad; es decir, si al lado izquierdo del punto la curva es cóncava hacia abajo ($f''(x)<0$) y si del lado derecho del punto la curva es cóncava hacia arriba ($f''(x)>0$) y viceversa. A continuación se dan curvas en donde aparecen puntos de inflexión.









Para obtener los puntos de inflexión de la función $f(x)$, se encuentran los valores de x para los que $f''(x)=0$ y dichos valores se grafican sobre la recta real para formar ciertos intervalos y en ellos se verifica la concavidad de la función.

Ejemplos

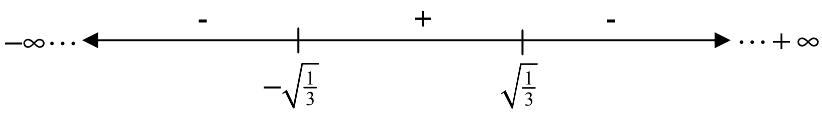
Obtenga los puntos de inflexión para cada función que se da.

1) $f(x)=12+2x^2-x^4$

$$f'(x)=4x-4x^3$$
$$f''(x)=4-12x^2$$
$$4-12x^2=0 \quad \Rightarrow \quad -12x^2=-4 \quad \Rightarrow \quad 12x^2=4$$
$$\therefore \quad x^2=\tfrac{4}{12} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Ahora al graficar los valores de la x, se obtienen los intervalos y se encuentran los signos de $f''(x)$, para conocer las concavidades.

Signos de $f''(x)$



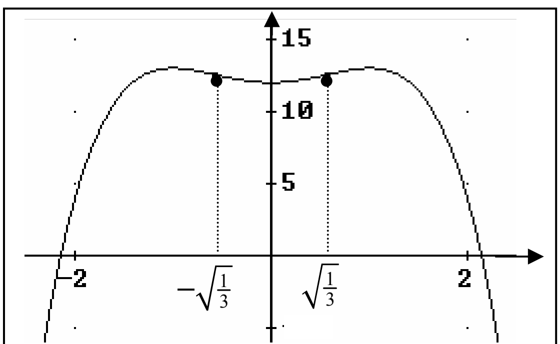
Si $f(-2)=4-12\left(-2\right)^2=4-12(4)=4-48=-44<0$

Si $f(0)=4-12(0)^2=4-0=4>0$

Y si $f(2)=4-12\left(2\right)^2=4-12(4)=4-48=-44<0$

Luego $x=-\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ y $x=\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ son puntos de inflexión dado que en dichos valores se dan los cambios en las concavidades.

Gráfica ilustrativa



Observación. Una regla que resulta muy útil para verificar en algunos casos si ciertos puntos son de inflexión o no es la siguiente:

Regla. Si $f''(a)=0$ y si $f'''(a)\neq 0$ entonces en $x=a$ existe un punto de inflexión.

2) $f(x)=x^5-5x^3$

$$f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$20x^3-30x=0 \quad\Rightarrow\quad x(20x^2-30)=0$$
$$\therefore\ \boxed{x=0}\quad \text{y}\quad 20x^2-30=0 \quad\Rightarrow\quad 20x^2=30$$
$$\therefore\quad x^2=\tfrac{30}{20} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x=\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}}$$

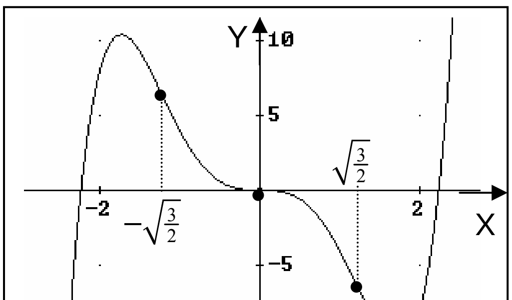
Ahora para verificar si en los valores obtenidos hay puntos de inflexión, utilizaremos la regla anterior y por esta razón se obtiene la tercera derivada, siendo esta $f'''(x)=60x^2-30$.

Si $x=0 \quad\Rightarrow\quad f'''(0)=60(0)^2-30=-30\neq 0$.

Si $x=-\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad f'''\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=60\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2-30=60\left(\tfrac{3}{2}\right)-30=90-30=60\neq 0$.

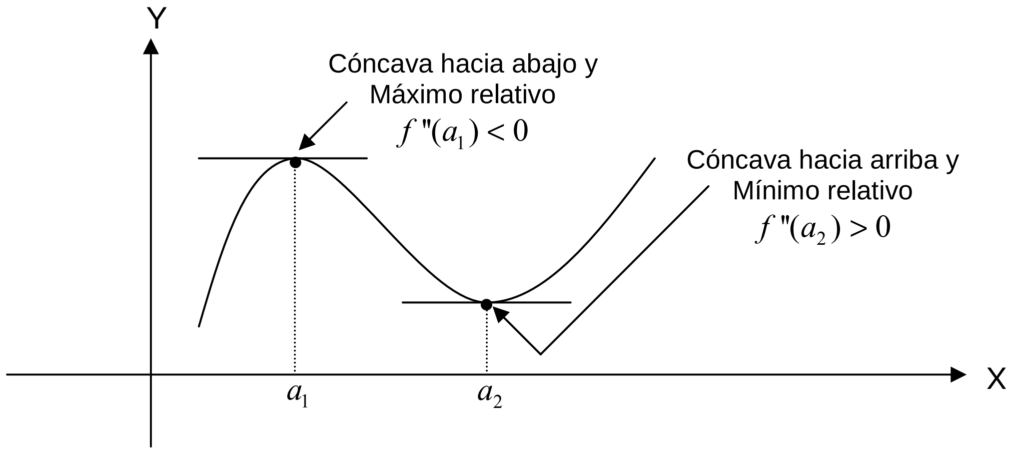
Y si $x=\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad f'''\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=60\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2-30=60\left(\tfrac{3}{2}\right)-30=90-30=60\neq 0$.

Luego como en los tres valores se cumple la regla, se concluye que $x=0$, $x=-\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ y $x=\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ son puntos de inflexión. A continuación se da una gráfica en donde se ilustran los puntos de inflexión.



8.6.3. Criterio de la Segunda Derivada

En base a lo que hemos visto anteriormente sobre la segunda derivada y las concavidades de una función $f(x)$, la segunda derivada podemos usarla para verificar si los valores críticos son máximos relativos o mínimos relativos. A continuación se da una gráfica ilustrativa.



Resumen del Criterio de la Segunda derivada
Si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en $x = a$ y si $f'(a) = 0$ entonces
$f''(a) < 0 \quad \Rightarrow$ un máximo relativo en $x = a$.
$f''(a) > 0 \quad \Rightarrow$ un mínimo relativo en $x = a$.
Y si $f''(a) = 0 \quad \Rightarrow$ que no existe máximo ni mínimo en $x = a$.

Ejemplos

Para cada una de las funciones que se dan, use el criterio de la segunda derivada para obtener los puntos máximos y mínimos relativos, encuentre los puntos de inflexión usando el cambio en las concavidades o por medio de la regla ($f''(a)=0 \quad y \quad f'''(a)\neq 0$), construya la gráfica, encuentre los intervalos en los que la función es creciente o decreciente e indique las concavidades de la función en cada intervalo.

1) $f(x)=x^3+6x^2+15$.

Primeramente se obtienen los valores críticos y para tal efecto se deriva la función y se iguala con cero.

$$f'(x)=3x^2+12x$$

$$3x^2+12x=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(3x+12\right)=0$$

$$\therefore \boxed{x=0} \quad y \quad 3x+12=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=-12 \quad \Rightarrow \quad x=-\tfrac{12}{3}$$

$$\therefore \boxed{x=-4}$$

Ahora para verificar si los puntos críticos $x=0$ y $x=-4$ son puntos máximos o mínimos se obtiene la segunda derivada y se evalúa en los puntos críticos.

$$f''(x)=6x+12$$

Si $x=-4 \quad \Rightarrow \quad f''(-4)=6\left(-4\right)+12=-24+12=-12<0$

Por lo tanto, en $x=-4$ existe un máximo.

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad f''(0)=6\left(0\right)+12=0+12=12>0$

Por lo tanto, en $x=0$ existe un mínimo.

Para obtener los puntos de inflexión usamos la regla antes vista; es decir: obtenemos los valores de x para los que la segunda derivada sea cero y verificamos si para dichos valores la tercera derivada es diferente de cero.

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+12=0 \quad \Rightarrow \quad 6x=-12 \quad \Rightarrow \quad x=-\tfrac{12}{6}$$

$$\therefore \boxed{x=-2}$$

$f'''(x)=6\neq 0 \quad \Rightarrow$ que en $x=-2$ existe un punto de inflexión.

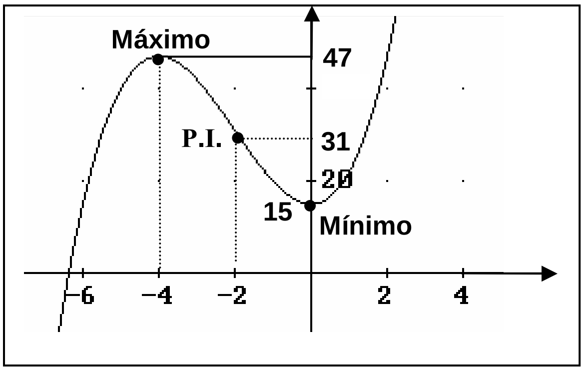
Para trazar la gráfica se evalúa la función en cada uno de los puntos obtenidos.

Si $x=-4 \quad \Rightarrow \quad f(-4)=\left(-4\right)^3+6\left(-4\right)^2+15=-64+96+15=47$.

Por lo tanto el punto (-4,47) es un máximo.

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = (0)^3 + 6(0)^2 + 15 = 0 + 0 + 15 = 15$.
Por lo tanto el punto (0,15) es un mínimo.
Y si $x = -2 \quad \Rightarrow \quad f(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 15 = -8 + 24 + 15 = 31$
Por lo tanto el punto (-2,31) es de inflexión.

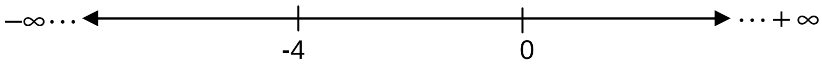
A continuación se grafican los puntos y se traza la gráfica.



$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$$

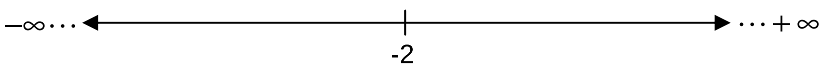
Para obtener los intervalos en donde la función es creciente o decreciente, consideramos los puntos máximos y mínimos para formar los intervalos y observamos la gráfica para ver si es creciente o decreciente.

Puntos máx. y mín.



Luego en el intervalo $(-\infty, -4)$ la función es creciente.
En el intervalo $(-4, 0)$ la función es decreciente
Y en el intervalo $(0, +\infty)$ la función es creciente.
También para obtener las concavidades, se grafica el punto de inflexión para formar los intervalos y se observa la gráfica.

Punto de inflexión.



Luego en el intervalo $(-\infty, -2)$ la función es cóncava hacia abajo.
Y en el intervalo $(-2, +\infty)$ la función es cóncava hacia arriba.

2) $f(x)=12+2x^2-x^4$.

Primero se obtienen los valores críticos

$$f'(x)=4x-4x^3$$

$$4x-4x^3=0 \quad \Rightarrow \quad 4x\left(1-x^2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 4x(1-x)(1+x)=0$$

$$\therefore \quad \boxed{x=0, \quad x=-1 \quad \text{y} \quad x=1.}$$

Ahora para verificar si los puntos críticos $x=0$ y $x=\pm 1$ son puntos máximos o mínimos se obtiene la segunda derivada y se evalúa en los puntos críticos.

$$f''(x)=4-12x^2$$

Si $x=-1 \quad \Rightarrow \quad f''(-1)=4-12(-1)^2=4-12=-8<0$

Por lo tanto, en $x=-1$ existe un máximo.

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad f''(0)=4-12(0)^2=4-0=4>0$

Por lo tanto, en $x=0$ existe un mínimo.

Y si $x=1 \quad \Rightarrow \quad f''(1)=4-12(1)^2=4-12=-8<0$

Por lo tanto, en $x=1$ existe un máximo.

Enseguida se obtienen los puntos de inflexión.

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 4-12x^2=0 \quad \Rightarrow \quad -12x^2=-4 \quad \Rightarrow \quad x^2=\tfrac{-4}{-12} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\tfrac{4}{12}}$$

$$\therefore \quad \boxed{x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}}$$

$$f'''(x)=-24x$$

Si $x=-\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'''\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)=-24\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\neq 0$

Por lo tanto, en $x=-\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ existe un punto de inflexión.

Si $x=\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'''\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)=-24\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\neq 0$

Por lo tanto, en $x=\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ existe un punto de inflexión.

Para trazar la gráfica se evalúa la función en cada uno de los puntos obtenidos.

Si $x=-1 \quad \Rightarrow \quad f(-1)=12+2(-1)^2-(-1)^4=12+2-1=13$.

Por lo tanto el punto (-1,13) es un máximo.

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad f(0)=12+2(0)^2-(0)^4=12+0-0=12$.

Por lo tanto el punto (0,12) es un mínimo.

Si $x=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=12+2(1)^2-(1)^4=12+2-1=13$

Por lo tanto el punto (1,13) es un máximo.

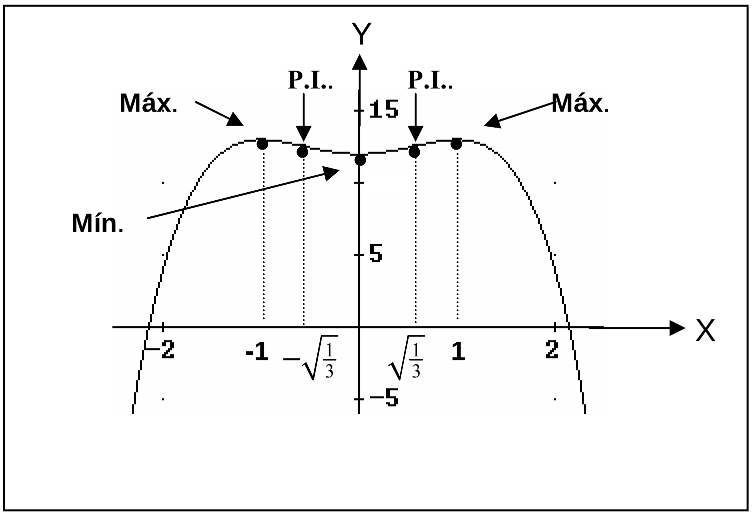
Si $x=-\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f(-\sqrt{\tfrac{1}{3}})=12+2\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^2-\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^4=12+\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{9}=\tfrac{113}{9}=12.55$

Por lo tanto el punto $\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}},12.55\right)$ es de inflexión.

Y si $x=\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f(\sqrt{\tfrac{1}{3}})=12+2\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^2-\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^4=12+\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{9}=\tfrac{113}{9}=12.55$

Por lo tanto el punto $\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}},12.55\right)$ es de inflexión.

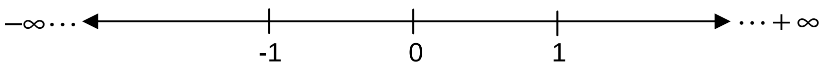
A continuación se grafican los puntos y se traza la gráfica.



$f(x)=12+2x^2-x^4$

Para obtener los intervalos en donde la función es creciente o decreciente, consideramos los puntos máximos y mínimos para formar los intervalos y observamos la gráfica.

Puntos máx. y mín.



Luego en el intervalo $(-\infty,-1)$ la función es creciente.

En el intervalo $(-1,0)$ la función es decreciente

En el intervalo $(0,1)$ la función es creciente.

Y en el intervalo $(1,+\infty)$ la función es decreciente

También para obtener las concavidades, se grafica el punto de inflexión para formar los intervalos y se observa la gráfica.

Puntos de inflexión.

Luego en el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$ la función es cóncava hacia abajo.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}},\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$ la función es cóncava hacia arriba.

Y en el intervalo $\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}},+\infty\right)$ la función es cóncava hacia abajo.

3) $f(x)=x^5-5x^3$.

Valores críticos.

$$f'(x)=5x^4-15x^2$$

$$5x^4-15x^2=0 \quad\Rightarrow\quad 5x^2\left(x^2-3\right)=0 \quad\Rightarrow\quad 5x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0$$

$$\therefore \boxed{x=0,\quad x=-\sqrt{3}\quad \text{y}\quad x=\sqrt{3}.}$$

Ahora se verifica si dichos puntos son máximos o mínimos.

$$f''(x)=20x^3-30x$$

Si $x=-\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad f''(-\sqrt{3})=20\left(-\sqrt{3}\right)^3-30\left(-\sqrt{3}\right)=-103.9+51.9=-52<0$

Por lo tanto, en $x=-\sqrt{3}$ existe un máximo.

Si $x=0 \quad\Rightarrow\quad f''(0)=20\left(0\right)^3-30\left(0\right)=0$

Por lo tanto, en $x=0$ no existe máximo ni mínimo.

Y si $x=\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad f''(\sqrt{3})=20\left(\sqrt{3}\right)^3-30\left(\sqrt{3}\right)=103.9-51.9=52>0$

Por lo tanto, en $x=\sqrt{3}$ existe un mínimo.

Puntos de inflexión.

$$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 20x^3-30x=0 \quad\Rightarrow\quad 10x\left(2x^2-3\right)=0$$

$$\therefore \boxed{x=0} \quad y \quad 2x^2-3=0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2=3 \quad\Rightarrow\quad x^2=\tfrac{3}{2}$$

$$\therefore \boxed{x=\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}}$$

$$f'''(x)=6x^2-30$$

Si $x=0 \quad\Rightarrow\quad f'''(0)=60(0)^2-30=-30\neq 0$.

Si $x=-\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad f'''\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=60\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2-30=60\left(\tfrac{3}{2}\right)-30=90-30=60\neq 0$.

Y si $x=\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad f'''\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=60\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2-30=60\left(\tfrac{3}{2}\right)-30=90-30=60\neq 0$.

Por lo tanto, en $x=-\sqrt{\frac{3}{2}},\quad x=0\quad \text{y}\quad x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ existen puntos de inflexión.

Para trazar la gráfica se evalúa la función en cada uno de los puntos obtenidos.

Si $x=-\sqrt{3}\quad \Rightarrow\quad f(-\sqrt{3})=\left(-\sqrt{3}\right)^5-5\left(-\sqrt{3}\right)^3=-15.5+25.9=10.4$.

Por lo tanto el punto $\left(-\sqrt{3},10.4\right)$ es un máximo.

Si $x=\sqrt{3}\quad \Rightarrow\quad f(\sqrt{3})=\left(\sqrt{3}\right)^5-5\left(\sqrt{3}\right)^3=15.5-25.9=-10.4$.

Por lo tanto el punto $\left(\sqrt{3},-10.4\right)$ es un mínimo.

Si $x=0\quad \Rightarrow\quad f(0)=(0)^5-5(0)^3=0$

Por lo tanto el punto (0,0) es de inflexión.

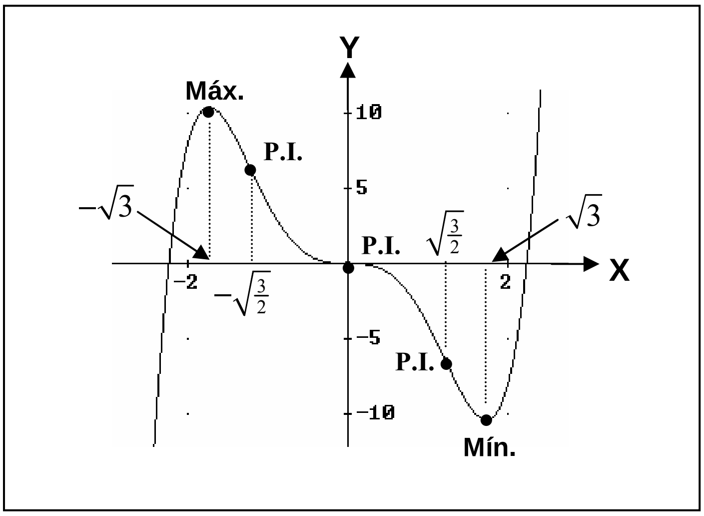
Si $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}\quad \Rightarrow\quad f(-\sqrt{\frac{3}{2}})=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5-5\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3=-2.7+9.1=6.4$

Por lo tanto el punto $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},6.4\right)$ es de inflexión.

Y si $x=\sqrt{\frac{3}{2}}\quad \Rightarrow\quad f(\sqrt{\frac{3}{2}})=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5-5\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3=2.7-9.1=-6.4$

Por lo tanto el punto $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-6.4\right)$ es de inflexión.

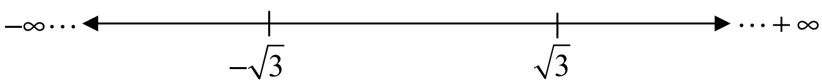
A continuación se grafican los puntos y se traza la gráfica.



$f(x)=x^5-5x^3$

Para obtener los intervalos en donde la función es creciente o decreciente, consideramos los puntos máximos y mínimos para formar los intervalos y observamos la gráfica para ver si es creciente o decreciente.

Puntos máx. y mín.



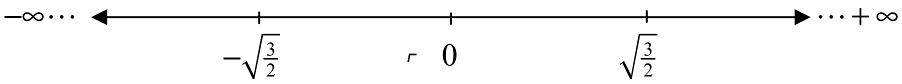
Luego en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ la función es creciente.

En el intervalo $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ la función es decreciente

Y en el intervalo $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ la función es creciente.

Para obtener las concavidades, se grafica el punto de inflexión para formar los intervalos y se observa la gráfica.

Puntos de inflexión.



Luego en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ la función es cóncava hacia abajo.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ la función es cóncava hacia arriba.

En el intervalo $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ la función es cóncava hacia abajo

Y en el intervalo $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ es cóncava hacia arriba.

8.7. Planteamiento de problemas de aplicación

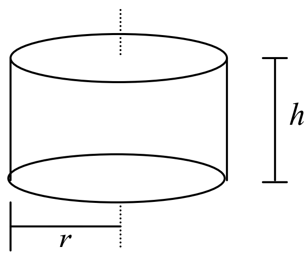
8.7.1. Problemas geométricos.

En primer lugar se le dará solución al problema de la lata de aceite que fue con el que se inició esta unidad.

1) El problema de la lata de aceite

Supóngase que una empresa necesita fabricar latas de aceite en la forma de un cilindro recto y éstas deben almacenar un litro (1000 cm^3) de aceite. ¿Cuáles serán las dimensiones que debe tener la lata, de forma tal que requiera la mínima cantidad de lámina para su fabricación?

Para fabricar la lata de aceite es necesario conocer dos de sus dimensiones, éstas son el radio de la lata y la altura. Supongamos que r representa el radio y que h representa la altura, medidas en centímetros.



Se sabe que el volumen de un cilindro recto de dichas dimensiones se representa como:

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

Además como la lata debe contener un litro de aceite exactamente, entonces el volumen debe ser de 1000 cm^3, de donde:

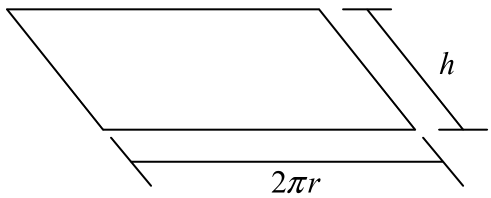
$$1000 = \pi r^2 h$$

ahora se observa que la altura h se puede representar en términos del radio r, es decir:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

como el objetivo es usar la menor cantidad de lámina para elaborar la lata de aceite, se debe obtener el valor del radio r de forma tal que el área de la superficie sea la mínima.

En la lata de aceite se observa que la tapa y el fondo, son círculos de la misma área, de donde se obtiene que el área del fondo y de la tapa es πr^2. Para hallar el área lateral de la lata, podemos cortarla sin considerar la tapa ni el fondo, desde arriba hasta abajo y después se aplana, de esta manera se forma una lámina rectangular en la que uno de sus lados corresponde a la altura h, de la lata y el otro lado mide $2\pi r$ que corresponde al perímetro de los círculos de la tapa y el fondo, como se indica en seguida:



El área este rectángulo es: $2\pi rh$ y corresponde al área lateral de la lata.

Finalmente el área total de la superficie de la lata es:

Área de la superficie = área de la tapa + área del fondo + área lateral

Área de la superficie = $\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh$.

Recordemos que $h = \frac{1000}{\pi r^2}$, luego entonces:

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r},$$

La cuál podemos representarla como:

$$\text{Área de la superficie} = \frac{2\pi r^3 + 2000}{r}$$

Si suponemos que el Área de la superficie se representa por $S(r)$, entonces:

$$S(r)=\frac{2\pi r^3+2000}{r}$$

Para obtener las dimensiones de la lata que minimizan el material utilizado, utilizaremos el criterio de la Segunda derivada. Y para tal efecto iniciamos obteniendo los puntos críticos.

$$S'(r)=\frac{r\left(6\pi r^2\right)-\left(2\pi r^3+2000\right)}{r^2}=\frac{6\pi r^3-2\pi r^3-2000}{r^2}$$
$$=\frac{4\pi r^3-2000}{r^2}$$

$$\frac{4\pi r^3-2000}{r^2}=0 \quad\Rightarrow\quad 4\pi r^3-2000=0 \quad\Rightarrow\quad 4\pi r^3=2000 \quad\Rightarrow$$

$$r^3=\frac{2000}{4\pi} \quad\Rightarrow\quad r=\sqrt[3]{\frac{2000}{12.56}}=\sqrt[3]{159.15}=5.41$$

$$\therefore \quad r=5.41.$$

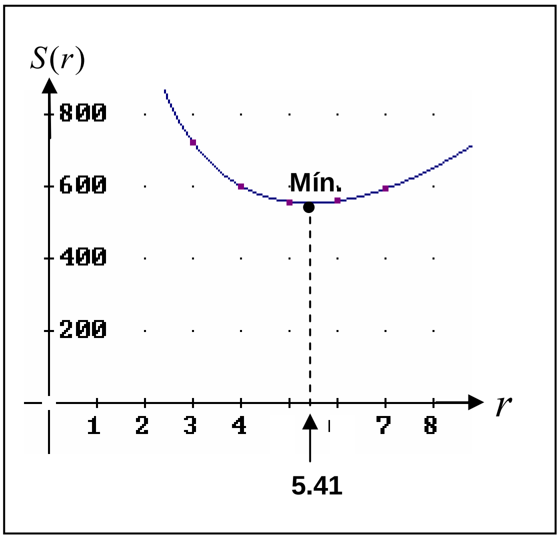
Para comprobar si en dicho valor existe un mínimo, se calcula la segunda derivada y se evalúa en $r=5.41$.

$$S''(r)=\frac{r^2\left(12\pi r^2\right)-\left(4\pi r^3-2000\right)(2r)}{r^4}=\frac{12\pi r^4-8\pi r^4+4000r}{r^4}$$
$$=\frac{4\pi r^4+4000r}{r^4}=\frac{r\left(4\pi r^3+4000\right)}{r^4}=\frac{4\pi r^3+4000}{r^3}=4\pi+\frac{4000}{r^3}$$

Luego si $r=5.41 \quad\Rightarrow\quad S''(5.41)=4\pi+\dfrac{4000}{(5.41)^3}=12.56+25.26=37.82>0$

Por lo tanto las dimensiones para las que se minimiza el material utilizado al fabricar la lata de aceite son:

$$r=5.41 \quad y \quad h=\frac{1000}{\pi r^2}=\frac{1000}{\pi(5.41)^2}=\frac{1000}{91.94}=10.87\,.$$

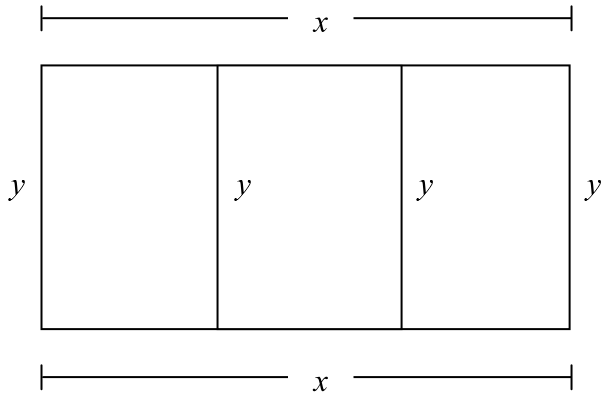


$$S(r)=\frac{2\pi r^3+2000}{r}$$

2) Un terreno rectangular que tiene 3200 m^2, se va a cercar y dividir en 3 porciones iguales mediante dos cercas paralelas a dos de los lados. Encontrar las dimensiones del terreno que requieran la menor cantidad de cerca.

Solución:

Supongamos que "x" y "y" son de tal forma que $xy = 3200m^2$, como se muestra en la figura siguiente:



Luego la función que se desea minimizar es la suma de cada una de los lados de la figura:

$$L = 2x + 4y$$

Además como $xy = 3200m^2 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3200}{x}$.

Por lo tanto $L(x) = 2x + 4\left(\dfrac{3200}{x}\right) = 2x + \dfrac{12800}{x}$

Ahora para minimizar las dimensiones que requieren la menor cantidad de cerca se utiliza el criterio de la segunda derivada en la función

$$L(x) = 2x + \frac{12800}{x}$$

$$L'(x) = 2 - \frac{12800}{x^2}$$

$$2 - \frac{12800}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{12800}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 12800 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{12800}{2}$$

$$\therefore \quad x = \pm\sqrt{6400} = \pm 80$$

Como la "x"no puede tomar valores negativos por que representa magnitudes, el único valor que tiene sentido es $x = 80m$. A continuación se verifica si en dicho valor en realidad se tiene un mínimo.

$L''(x) = \frac{25600}{x^3}$.

Si $x = 80 \quad \Rightarrow \quad L''(80) = \frac{25600}{(80)^3} = 0.05 > 0$. Por lo tanto en $x = 80m$, existe un mínimo.

Entonces $L(80) = 2(80) + \frac{12800}{80} = 160 + 160 = 320m$ es la cantidad mínima de cerca requerida.

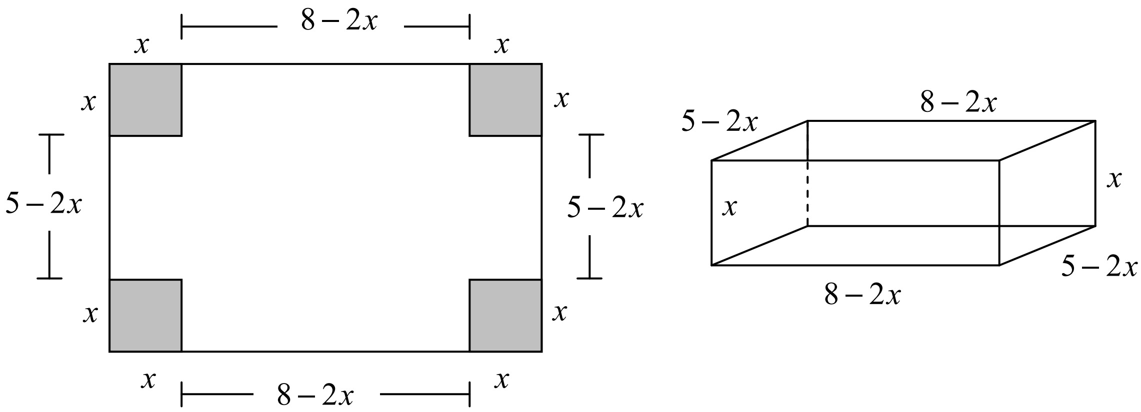
Además como $y = \frac{3200}{x} = \frac{3200}{80} = 40m$.

Por lo tanto las dimensiones del terreno para el que se minimiza la cantidad de cerca utilizada son: $80m \times 40m$.

3) Un ingeniero tiene un gran lote de piezas rectangulares de cartón de 8X5 pulgadas. Con cada una de éstas debe hacerse una caja abierta cortando un cuadrado en cada esquina, y doblándola después para formarse los lados. ¿Cuál es el volumen máximo que puede formarse de este modo?

Solución:

En primer lugar se construye una figura en la que se muestran los datos que se dan y a además "x" representa los lados de cada cuadrado en las esquinas.



Observemos que el volumen de la caja está dado por:

El ancho por el largo por la altura

Es decir: $V(x) = (5-2x)(8-2x)x = (40-10x-16x+4x^2)x$

$$= (4x^2-26x+40)x = 4x^3-26x^2+40x$$

$$V'(x) = 12x^2-52x+40$$

$$12x^2-52x+40=0$$

$$x = \frac{-(-52)\pm\sqrt{(-52)^2-4(12)(40)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{52\pm\sqrt{2704-1920}}{24}$$

$$x = \frac{52\pm\sqrt{784}}{24} = \frac{52\pm 28}{24}$$

$$\therefore \quad x = \frac{52-28}{24} = 1 \quad y \quad x = \frac{52+28}{24} = 3.33$$

De estos dos valores el que tiene sentido es $x=1$.
Ahora verificaremos si en dicho valor el volumen es máximo.

$$V''(x) = 24x-52$$

Si $x=1 \Rightarrow V''(1) = 24(1)-52 = -28 < 0$

De donde se obtiene que para $x=1$ el volumen se maximiza.

Por lo tanto el volumen máximo de la caja es:

$$V(1) = (5-2)(8-2)(1) = 3(6)(1) = 18u^3$$

8.7.2. Problemas sobre costos.

1) Un arrendador ha adquirido un nuevo edificio con 100 apartamentos para rentar y encuentra que entre más unidades "x" quiere rentar, menor deberá ser su precio $P(x)$, de acuerdo a la fórmula

$$P(x) = 180-1.2x \qquad 0 \le x \le 100$$

¿Cuántas unidades y a que precio deberá intentar rentar, para maximizar sus ingresos?

Solución.

Sus ingresos serán:

$$y = xP(x) = x(180 - 1.2) = 180x - 1.2x^2$$

En seguida se derivan los ingresos para obtener el valor crítico.

$$y' = 180 - 2.4x$$

$$180 - 2.4x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2.4x = -180 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-180}{-2.4} = 75$$

Ahora se verificará si en el valor crítico obtenido existe un máximo.

$$y'' = -2.4 < 0$$

Por lo tanto cuando el número de unidades rentadas es 75 los ingresos se maximizan.

Si $x = 75 \quad \Rightarrow \quad P(75) = 180 - 1.2(75) = 180 - 90 = 90$

Luego deberá rentar 75 departamentos, así el precio por unidad es de 90 pesos y los ingresos máximos serán:

$y = xP(x) = 75P(75) = 75(90) = 6750$ pesos.

2) Un vendedor ha examinado los datos acerca de los costos al año de comprar, tener y mantener el inventario como función del número de unidades de cada orden que vende. La función de costo es:

$$C(q) = \frac{4860}{q} + 15q + 750\ 000$$

C = costo anual del inventario en dólares.
q = número de unidades cada vez que se reabastece.

a) Determinar el tamaño de la orden que minimiza el costo anual del inventario.

b) A cuánto se esperará que ascienda el costo mínimo anual del inventario.

Solución:

$$C'(q) = -\frac{4860}{q^2} + 15$$

$$-\frac{4860}{q^2} + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad 15 = \frac{4860}{q^2} \quad \Rightarrow \quad q^2 = \frac{4860}{15} = 324$$

$$\therefore \quad q = \sqrt{324} = 18$$

Sustituyendo $q = 18$ en la segunda derivada tenemos:

$$C''(q)=\frac{9720}{q^3} \quad \Rightarrow \quad C''(18)=\frac{9720}{(18)^3}=\frac{9720}{5832}=1.66>0$$

Por lo tanto para $q=18$ se obtiene un mínimo. Luego Los costos mínimos anuales del inventario serán cuando se ordenan 18 unidades cada vez que el proveedor se reabastece y el costo mínimo anual del inventario es:

$$C(18)=\frac{4860}{18}+15(18)+750,000=750540.$$

3) Una empresa determina que en la producción de x unidades de un artículo sus funciones de ingreso y de costo, respectivamente son: $I(x)=-3x^2+970x$ y $C(x)=2x^2+500$. Encontrar la utilidad máxima y el costo medio mínimo.

Solución:

En primer lugar se aclara que la utilidad se define como

$$U(x)=I(x)-C(x)$$

Y el costo medio o costo por unidad es: $Q(x)=\frac{C(x)}{x}$.

Luego la utilidad para $x\geq 0$ es:

$$\begin{aligned} U(x)&=\left(-3x^2+970x\right)-(2x^2+500)\\ &=-3x^2+970x-2x^2-500\\ U(x)&=-5x^2+970x-500 \end{aligned}$$

A continuación se obtiene el valor crítico y se verifica si es un máximo.

$$U'(x)=-10x+970$$

$$-10x+970=0 \quad \Rightarrow \quad -10x=-970 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-970}{-10}=97$$

$U''(x)=-10<0$. Por lo tanto para $x=97$ existe un máximo.

Luego la utilidad se máxima para $x=97$; es decir, la utilidad máxima es:

$$\begin{aligned} U(97)&=-5(97)^2+970(97)-500\\ &=-47045+94090-500\\ &=46,545 \end{aligned}$$

Ahora para el costo medio, se sabe que:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^2 + 500}{x} = 2x + \frac{500}{x}$$

$$\therefore \quad Q(x) = 2x + \frac{500}{x}$$

Al aplicar el criterio de la Segunda Derivada se tiene lo siguiente:

$$Q'(x) = 2 - \frac{500}{x^2}$$

$$2 - \frac{500}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{500}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{500}{2} = 250$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{250} = 15.81$$

$Q''(x) = \dfrac{1000}{x^3}$. Si $x = 15.81 \quad \Rightarrow \quad Q''(15.81) = \dfrac{1000}{(15.81)^3} > 0$.

Por lo tanto para $x = 15.81$, se obtiene un mínimo.

Como la empresa produce artículos completos tomamos el entero más cercano; es decir: $x = 16$. De donde se deduce que el costo medio mínimo es aproximadamente:

$Q(16) = 2(16) + \dfrac{500}{16} = 32 + 31.25 = 63.25$ unidades monetarias

8.8. Formas indeterminadas. Regla de L'Hospital

Anteriormente, la evaluación del

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ cuando } f(a) = \frac{0}{0} \quad o \quad \frac{\infty}{\infty}$$

se discutió para ciertos tipos particulares de funciones. En este apartado se dan procedimientos más generales para evaluar estos límites indeterminados, este procedimiento se basa en la regla de L'Hospital:

Si $f(a) = f(b) = 0 \quad o \quad f(a) = f(b) = \infty \quad y \quad \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, entonces

$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. (Esta regla es válida para a finita o infinita)

Si $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ es en si mismo una indeterminación $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, entonces esta regla se aplica nuevamente y

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$ y así sucesivamente.

Ejemplos.

Use la regla de L'Hospital para evaluar los límites que se indica.

1. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h+25}-5}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(h+25\right)^{-\frac{1}{2}}}{1}=\dfrac{1}{2\left(5\right)}=\dfrac{1}{10}$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{5x^4}{1}=5$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4+2x^2}{2x^3+5x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^3+4x}{6x^2+10x}=\dfrac{0}{0}$. Se aplica la regla nuevamente:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+4x}{6x^2+10x}=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2+4}{12x+10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{5x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{5}=\dfrac{1}{5}$

5. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{6x}=\dfrac{0}{0}$. Se aplica la regla nuevamente:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}$$

6. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\dfrac{0}{1}=0$

7. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{12x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{24x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{24}{e^x}=0$.

Observemos que la regla se aplicó cuatro veces.

Ejemplos de límites en donde aparece la indeterminación $\infty-\infty$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{senx}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-senx}{xsenx}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cos x+senx}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x(-senx)+\cos x+\cos x}=\frac{0}{0+1+1}=0$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{xe^x+\left(e^x-1\right)(1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+e^x+e^x}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

Ejemplos de límites en donde aparece la indeterminación $0\cdot\infty$.

10, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\csc^2 x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{sen^2 x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{sen^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2senx\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2senx\cdot(-senx)+\cos x\left(2\cos x\right)}$$

$$=\frac{2}{0+2}=1$$

Ejemplos de límites en donde aparece la indeterminación 1^∞.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$

Para evaluar este tipo de límites, se sugiere utilizar el logaritmo natural para representar el límite de manera conveniente y al final se aplica la exponencial.

$$\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln\left(1+x\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}=\dfrac{0}{0}$. Luego:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora como $\ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to 0} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

Ya que las funciones $y = \ln x$ y $y = e^x$, son funciones inversas, entonces:

$$= \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

13. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Usamos el procedimiento del ejemplo 12.

$$\ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$\lim_{x \to \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$. Luego:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{\frac{x+2}{x}}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^3 + 2x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^3 + 2x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x^2}{3x^2 + 4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{12x}{6x+4} = \lim_{x \to \infty} \frac{12}{6} = 2$$

Ahora como $\lim_{x \to \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \ln \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$. Entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$$

Ejemplos de límites en donde aparece la indeterminación 0^0.

14. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Usamos el procedimiento del ejemplo 12.

$$\ln x^x = x\ln x$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln|x| = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Luego:

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

´,Ahora como $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^x = \ln \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. Entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

15. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+senx)^{\tan x}$

$$\ln (x+senx)^{\tan x} = \tan x \ln (x+senx)$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln (x+senx)^{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \ln (x+senx) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln (x+senx)}{\frac{1}{\tan x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Luego:

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (x+senx)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+senx}(1+\cos x)}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1+\cos x}{x+senx}}{-\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1+\cos x}{x+senx}}{-\frac{1}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-sen^2 x + senx^2 \cos x}{x+senx}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2senx\cos x + senx^2(-senx) + \cos x(2senx\cos x)}{1+\cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} (x + senx)^{\tan x} = e^0 = 1$$

Ejemplos de límites en donde aparece la indeterminación ∞^0.

16. $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

$$\ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln x$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\ x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln\ x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}.$$ Luego:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

8.9. Ejercicios

8.9.1. Use el criterio de la Primera derivada para obtener los puntos máximos y mínimos relativos y trace la gráfica para cada función.

1. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
4. $f(x) = x^2 - x^3$
5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
6. $f(x) = x^4 - x^3$
7. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$
8. $f(x) = x^4 - 8x^2$
9. $f(x) = 4x^3 - 3x^4$
10. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$
11. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$
12. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2$

8.9.2. Obtenga los puntos máximos y mínimos utilizando el Criterio de la Segunda Derivada, encuentre los puntos de inflexión, los intervalos en donde la función es creciente o decreciente, las concavidades en cada intervalo y trace la gráfica para cada función que se da.

1. $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$
2. $f(x)=x^3-3x^2+3x$
3. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$
4. $f(x)=x^2-x^3$
5. $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$
6. $f(x)=x^4-x^3$
7. $f(x)=x^4-4x^3+10$
8. $f(x)=x^4-8x^2$
9. $f(x)=4x^3-3x^4$
10. $f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x$
11. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$
12. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3+8x^2$

8.9.3. Resuelva cada uno de los problemas que se enumeran.

1) Encuentre dos números cuya suma sea 40 y cuyo producto sea máximo.

2) Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 20 y el doble de uno de ellos multiplicado por el cuadrado del otro sea un máximo.

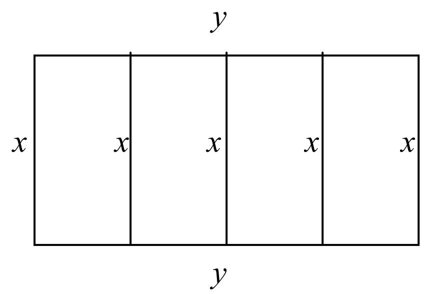
3) Dado un rectángulo de perímetro “p” y área “A”. Si el perímetro es 8. Calcular sus dimensiones para que el área sea máxima.

4) Un trozo de alambre de 20 pulgadas de largo va a doblarse para formar un marco. ¿Cuál es la mayor área posible que puede abarcarse?

5) Un segmento de un metro de longitud se divide en dos partes. Sobre cada una de las partes se construye un triángulo equilátero. Calcular las longitudes de los segmentos de tal forma que la suma de las áreas de los triángulos sea máxima.

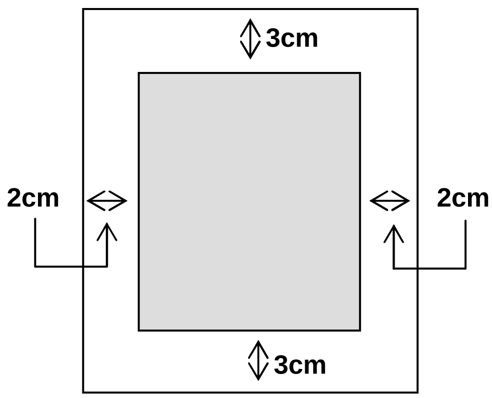
6) El propietario de un terreno rectangular de 1000 metros cuadrados de área quiere cercarlo y dividirlo en cuatro lotes iguales, con tres cercas paralelas a uno de los lados, como se

muestra en la figura. ¿Cuál es el mínimo de metros de cerca necesarios?



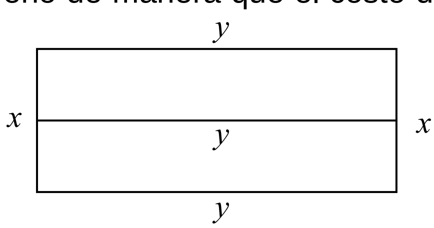
7) Un granjero tiene 1000 metros de materiales para cercas con las que va a cerrar tres de los lados de un campo rectangular. Siendo el cuarto de los lados un rió. ¿Cuál es la mayor superficie que puede cercar.

8) Un cartel rectangular de cartón debe tener 150 cm cuadrados para área impresa, márgenes de 3 cm arriba y abajo y 2 cm a cada lado. Encuentre las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima,



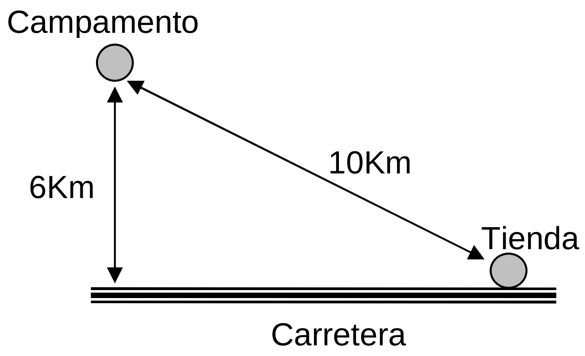
9) Un fabricante de cajas de estaño desea emplear piezas de 8 por 15 pulgadas, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y dolando los lados. Calcule la longitud del lado del cuadrado que será cortado si se desea obtener de cada pieza de estaño una caja abierta que tenga el mayor volumen posible.

10) Un terreno rectangular que tiene un área de 2700 m^2 se va a cercar y se va a utilizar una valla para dividir al terreno por la mitad. El costo de la cerca que pasa por la mitad del terreno es de 12 dólares por metro lineal y la reja que se extiende a los lados del terreno cuesta 18 dólares por metro lineal. Calcule las dimensiones del terreno de manera que el costo del enrejado sea el mínimo.

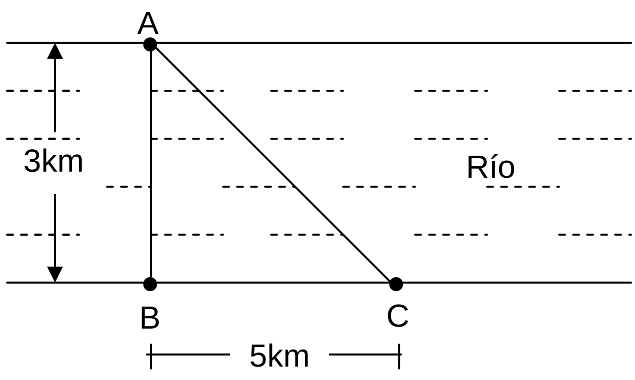


11) Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular sin tapa con un volumen de 24π cm^3. El precio del material que se usa para el fondo es el triple que del material que se usa para la parte curva. Encuentre las dimensiones del recipiente para las cuales el costo es mínimo.

12) Un campamento, situado en un bosque, está a 6 kilómetros del punto más cercano de una carretera (recta). La distancia de este punto a una tienda situada en la carretera es de 10 kilómetros. Si un excursionista desea caminar del campamento a la tienda en un tiempo mínimo. Que ruta debe seguir si puede caminar a la velocidad de 5 kilómetros por hora por la carretera y 3 kilómetros por hora por el bosque.



13) Los puntos A y B son opuestos entre si en las márgenes de un río de forma recta y con 3 km (kilómetros) de ancho. El punto C está en la mismo margen de B, pero 2 km río abajo respecto de dicho punto. Una compañía telefónica desea tender un cable desde A hasta C. Si el costo por km de cable es 25% mayor por el agua que por tierra. ¿Qué línea de cable será la menos costosa para la compañía?



14) ¿Cuál es el punto sobre la gráfica de $y = x^2$ más cerca del punto A(3,0)?

15) Una bodega ha decidido instalar nueve alarmas. Dada la estructura de la bodega solo se puede optar por dos tipos de alarmas: A o B. La seguridad de la bodega se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la bodega para maximizar su seguridad?

16) Para un producto "q" de un fabricante, la función de ingreso está dada por $I(q) = 240q + 57q^2 - q^3$. Determine la producción que produce un ingreso máximo.

17) Supóngase que una compañía ha calculado que su ingreso total R por un cierto producto está dado por $R(x) = -x^3 + 450x^2 + 52000x$, donde R se mide en dólares y "x" es el número de unidades producidas. ¿Qué nivel de producción dará un ingreso máximo?

18) Una empresa determina que el costo $C(x)$ por producir "x" unidades de un artículo de consumo es aproximadamente $C(x) = 100 + \frac{10}{x} + \frac{x^2}{100}$. ¿Cuántas unidades se deben producir para que el costo sea mínimo?

19) La función de costo total de un fabricante está dada por $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 400$, donde C es el costo de producir x unidades. ¿Para que nivel de producción será el costo promedio por unidad un mínimo?, ¿Cuál es el mínimo? (Recuerde que el costo promedio es $\frac{C(x)}{x}$).

20) Una empresa televisora por cable tiene 2000 suscriptores que pagan una cuota mensual de $20. Una encuesta reveló que se tendrían 50 suscriptores más por cada $0.25 de disminución en la cuata. ¿Para que cuota se obtendría el ingreso máximo y cuántos suscriptores e tendrían entonces?

8.9.4. Evalúe los límites siguientes usando la regla de L'Hospital.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x}{3x^3 + 5x^2 - x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2}{3x^3 + 5x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(2x)}{4x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^7}{e^x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx - x}{x^3}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x - 1}{e^x + e^{-x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x^2 - senx}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{senx}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2senx}{5x^3}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2}{2x^4}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3}{e^x + x^2 - 2}$

17. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x-1}\right)$

19. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{senxx} - \dfrac{1}{x}\right)$